SEM 1: Einführung in Lineare Strukturgleichungsmodelle

Rückblick Wintersemester: Zusammenhang Theorien und Daten

Theorie/Hypothese: Verbales Modell eines Phänomens

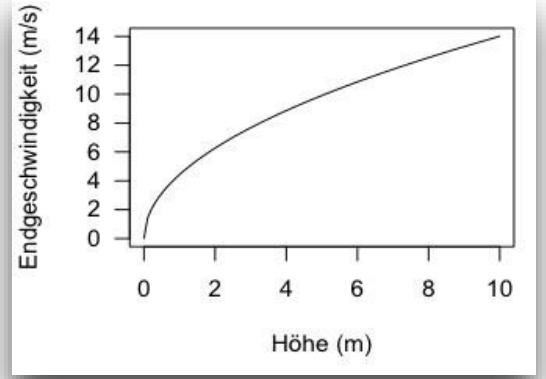
Ein Gegenstand im freien Fall beschleunigt immer mehr, bis er auf den Boden trifft.

Formales Modell eines Phänomens

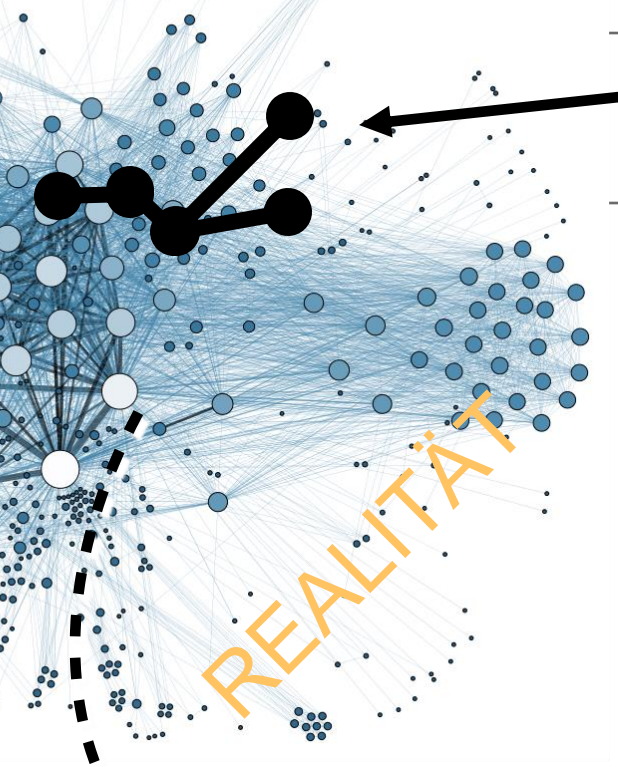
$$v(h) = \sqrt{2gh}$$

Die Realität liefert Daten

Das Modell sagt Daten vorher



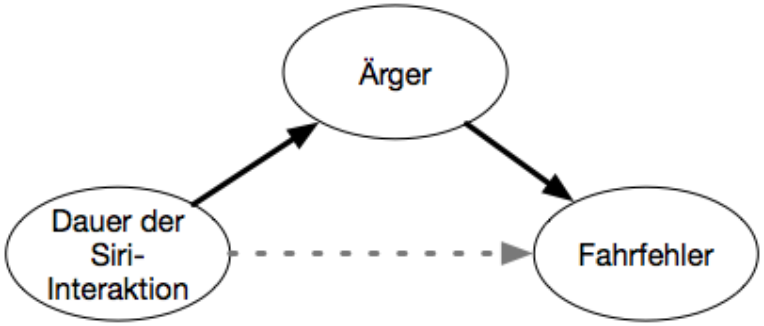
Popper (1935/2005); Meehl (1967; 1990); Dienes (2008); Rouder, Morey, & Wagenmakers (2015)



Theorie/ Hypothese: Verbales Modell eines Phänomens

Längere Interaktionen mit Siri führen nur deshalb zu mehr Unfällen, weil sie Ärger beim Fahrer auslösen.

Formales Kausalmodell eines Phänomens



Die Realität liefert Daten

	mimic	voice	hrtrt	att1	att2	att3	att4	errrs	siri
mimic	1.12								
voice	0.22	1.15							
heartrate	-0.05	0.05	1.19						
att1	0.01	0.01	0.15	0.94					
att2	0.04	0.03	0.02	0.13	1.09				
att3	0.05	-0.13	-0.03	-0.02	0.05	1.07			
att4	-0.06	0.11	-0.12	0.02	0.07	0.29	1.46		
errors	0.55	0.48	0.07	0.18	0.33	0.42	0.71	2.93	
siri	0.30	0.19	0.05	0.13	0.21	0.19	0.13	0.97	1.29

S **empirische** Kovarianzmatrix

Das Modell sagt Daten vorher

	mimic	voice	hertrt	att1	att2	att3	att4	errors	siri
mimic	1.49								
voice	0.24	1.12							
heartrate	0.16	0.08	1.05						
att1	0.01	0.01	0.00	1.04					
att2	0.02	0.01	0.01	0.08	1.16				
att3	0.02	0.01	0.01	0.06	0.12	1.09			
att4	0.03	0.02	0.01	0.12	0.25	0.18	1.37		
errors	0.79	0.40	0.26	0.16	0.32	0.24	0.48	2.78	
siri	0.36	0.18	0.12	0.03	0.06	0.04	0.09	0.70	1.00

modell-implizierte Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}$

Wiederholung letzte Woche: Zusammenhang SEM und DAG

Ein **Lineares Strukturgleichungsmodell (SEM)** kann betrachtet werden als die folgende Kombination:

- Kausales Modell: Kausalbeziehungen zwischen Variablen sind formalisiert als Graph (DAG)
- Annahme linearer Zusammenhänge (meist ohne Interaktionen) zwischen allen Variablen sowie (ursprünglich) Normalverteilung aller Variablen: Pfadkoeffizienten analog zu Regressionskoeffizienten aus einer (multiplen) linearen Regression
- Eventuell zusätzliche Berücksichtigung nicht beobachteter Variablen: Messmodelle für latente Variablen

Kommentar:

- In der Psychologie sind nicht direkt beobachtbare Variablen eher die Regel als die Ausnahme (z.B. Intelligenz, Persönlichkeit, Werte, …)

Die SEM Familie

Lineare Strukturgleichungsmodelle sind ein sehr beliebtes Multifunktionstool, dass in verschiedenen Kontexten eingesetzt werden kann.

Strukturgleichungsmodell (SEM) als Oberbegriff / Kombination von …

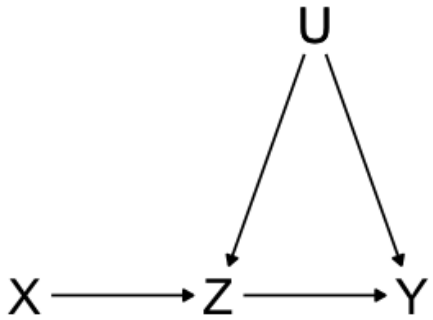
- *Pfadanalyse:* Mehrere direkte kausale Effekte von beobachteten („manifesten“) Variablen gemeinsam schätzen (DAG + Zusatzannahmen)
- *Strukturelle Regressionsanalyse:* Pfadanalyse, bei der (auch) nicht beobachtete („latente“) Variablen enthalten sind
- *Konfirmatorische Faktorenanalyse:* Fokus auf der Modellierung von latenten Variablen und ungerichtete Zusammenhänge zwischen diesen

SEMs sind für die Psychologie besonders nützlich, weil sie …

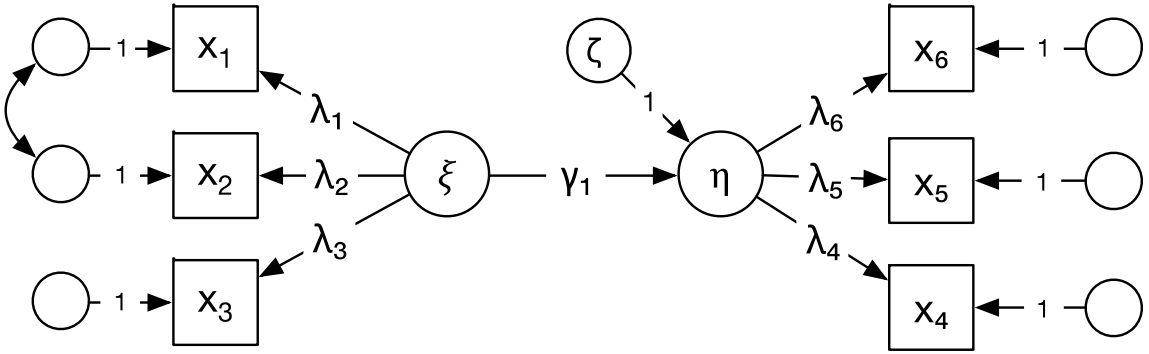
- komplexe sprachliche Theorien relativ leicht formalisieren und prüfen
- und dabei Messfehler berücksichtigen können.

Grafische Darstellung von SEMs

- Die grafische Darstellung von DAGs besteht klassischerweise nur aus Variablennamen und gerichteten Pfeilen.

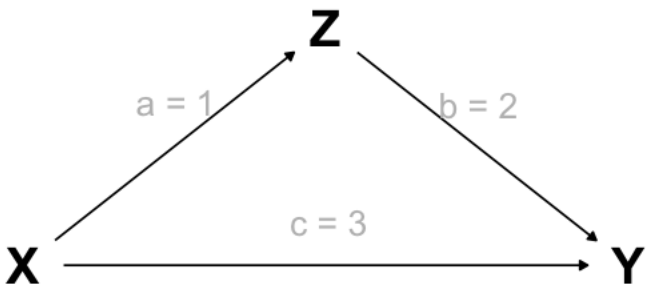


- Bei Strukturgleichungsmodellen haben sich erweiterte Konventionen für die grafische Darstellung etabliert.
- Wir werden diese zusätzliche Notation in dieser Vorlesung Schritt für Schritt einführen und am Ende nochmal (vollständig) zusammenfassen.



Mehrere direkte kausale Effekte auf einmal schätzen


```
> n <- 1000
> a <- 1
> b <- 2
> c <- 3
> set.seed(1)
> x <- rnorm(n)
> z <- rnorm(n, mean = a * x)
> y <- rnorm(n, mean = b * z + c * x)
> dat <- data.frame(x = x, y = y, z = z)
```



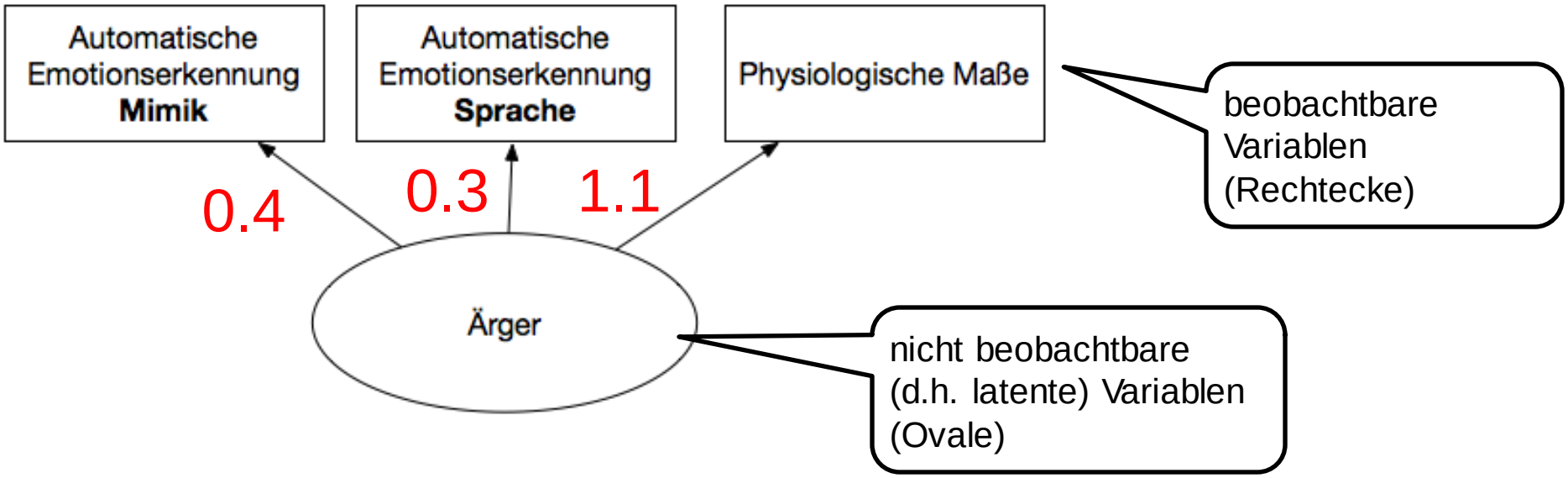
Regressionsanalyse

```
> coef(lm(z ~ x))
(Intercept)           x
-0.01618698  1.00643254
> coef(lm(y ~ z + x))
(Intercept)           z           x
  0.0162384   2.0220170   3.0270318
```

Pfadanalyse

```
> library(lavaan)
>
> model <- "
+   z ~ a * x
+   y ~ b * z + c * x
+ "
> fit <- sem(model, data = dat)
> coef(fit)
    a     b     c  z~~z  y~~y
1.006 2.022 3.027 1.080 1.059
```

Darstellung latenter Konstrukte

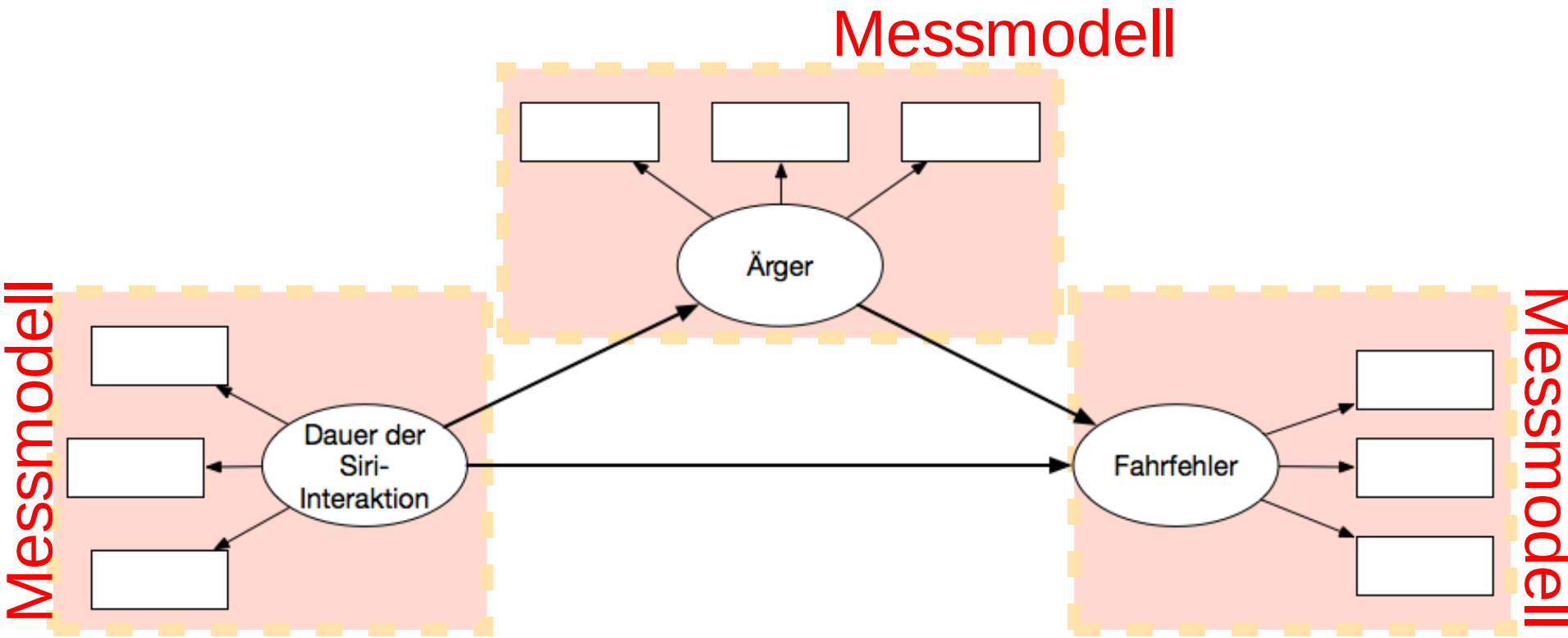


- Latente Konstrukte modellieren
- Optimale Gewichtung der Indikatoren

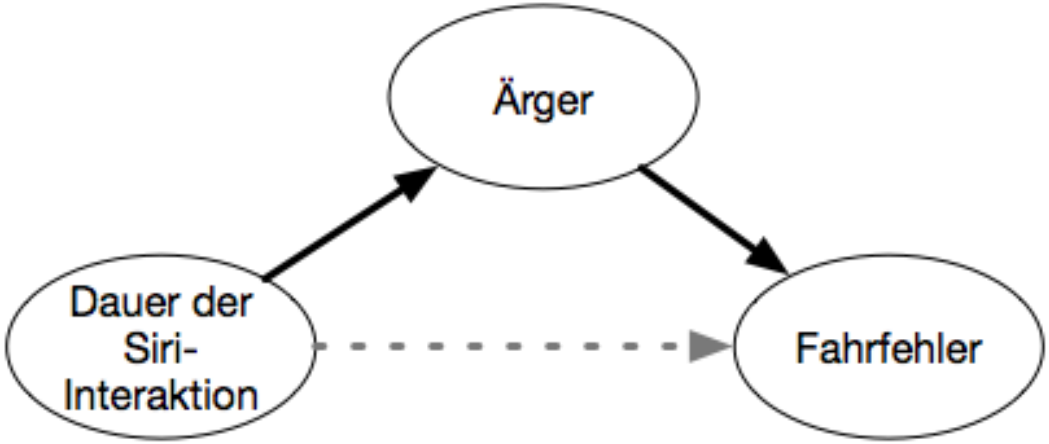
Messmodell

Wie werden die einzelnen latenten Variablen „gemessen“?

- Auf welche „Indikatoren“ wirken sie sich jeweils aus.

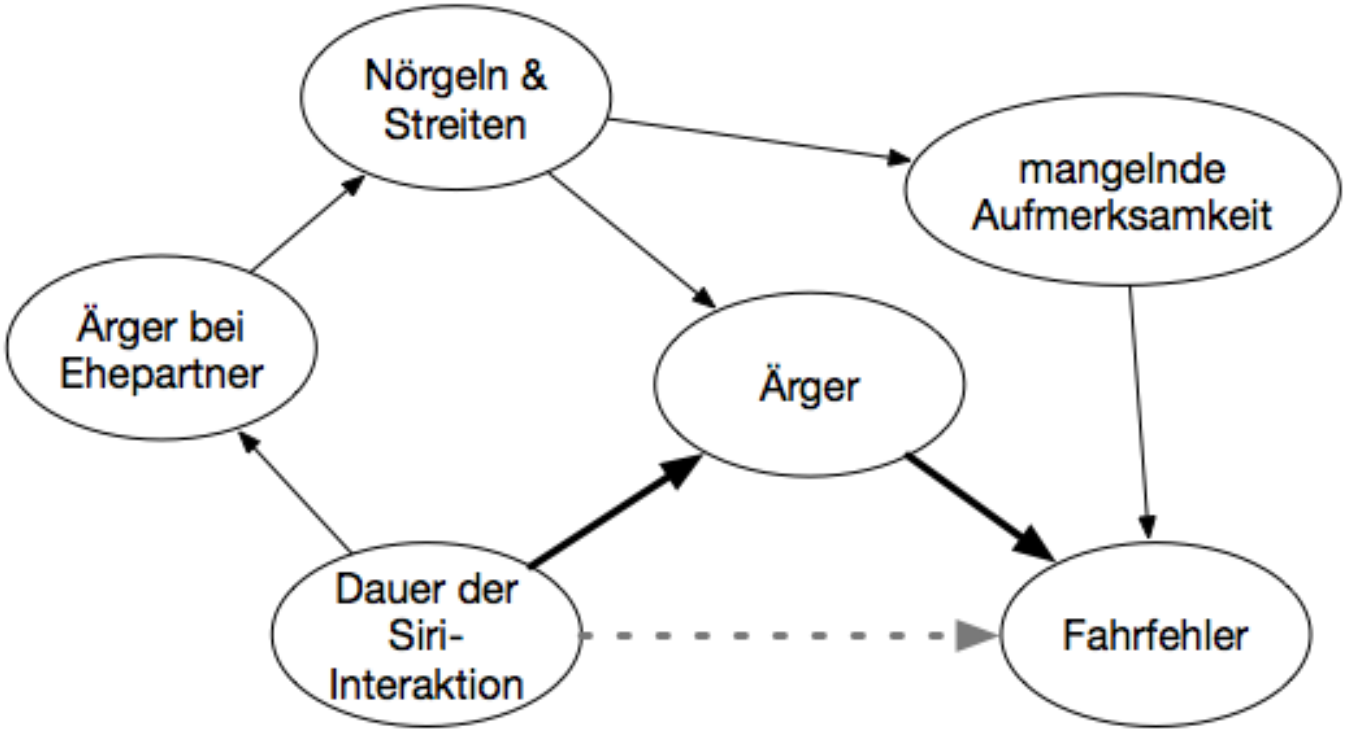


Komplexe Kausale Zusammenhänge



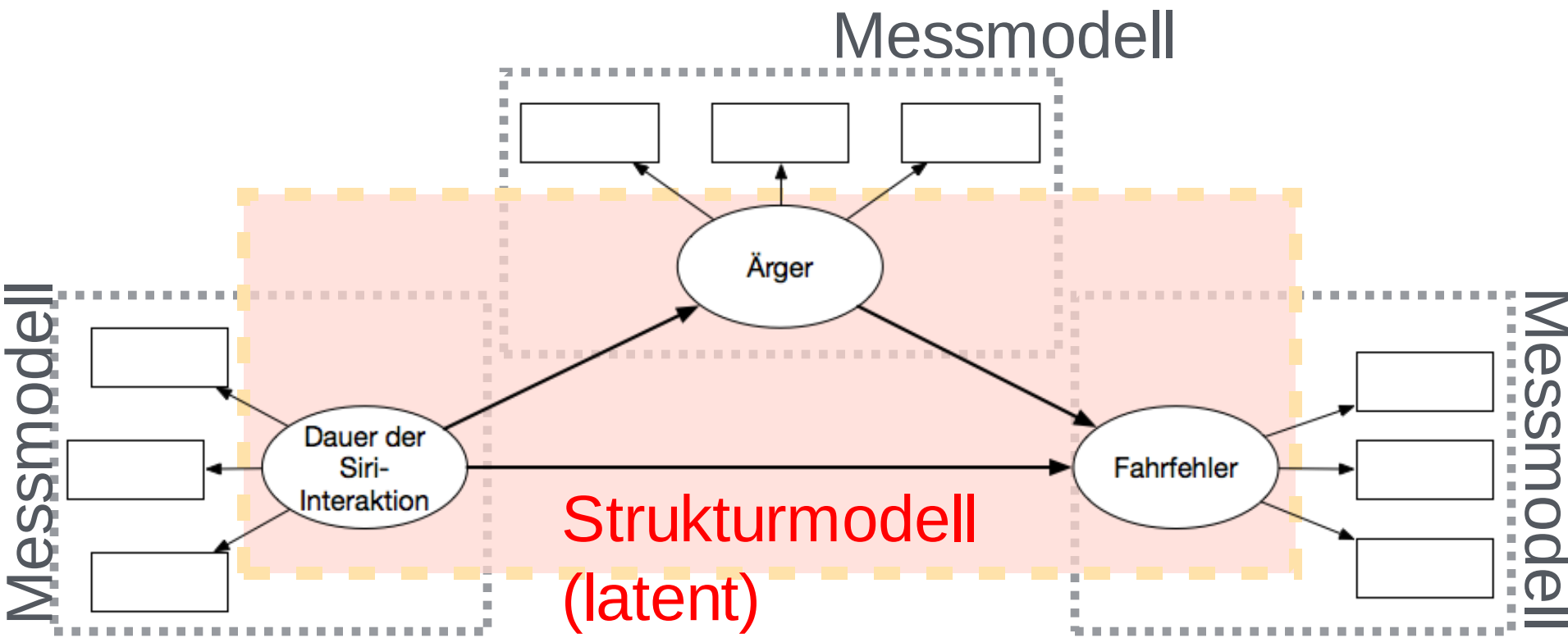
- "Multiequation models": Erweiterung von linearer Regression
- Indirekte Effekte

Komplexe Zusammenhänge



- "Multiequation models": Erweiterung von linearer Regression
- Indirekte Effekte

Mess- und Strukturmodell



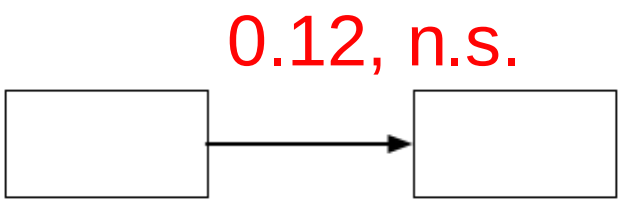
Zusammenfassung

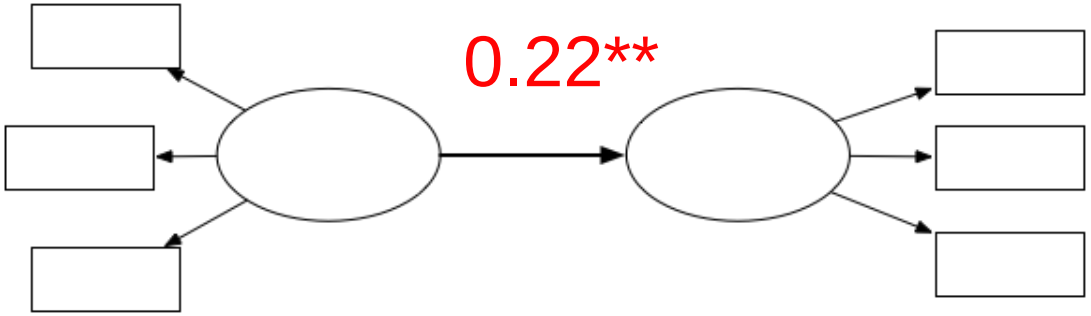
- **Messmodell:** beschreibt die Verknüpfung zwischen einer latenten Variable und ihren Indikatoren bzw. manifesten Variablen

  → spezifiziert die Operationalisierung des Konstrukts

- **Strukturmodell:** beschreibt die Verknüpfung zwischen latenten Variablen, oder zwischen latenten Variablen und manifesten Variablen, welche nicht als Indikatoren für latente Variablen verwendet werden

Berücksichtigung von Messfehlern



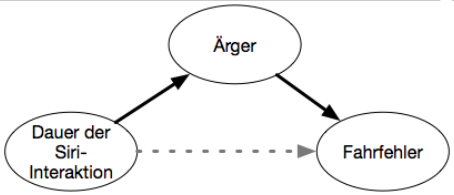


- Schätzung der messfehlerbereinigten Zusammenhänge auf latenter Ebene

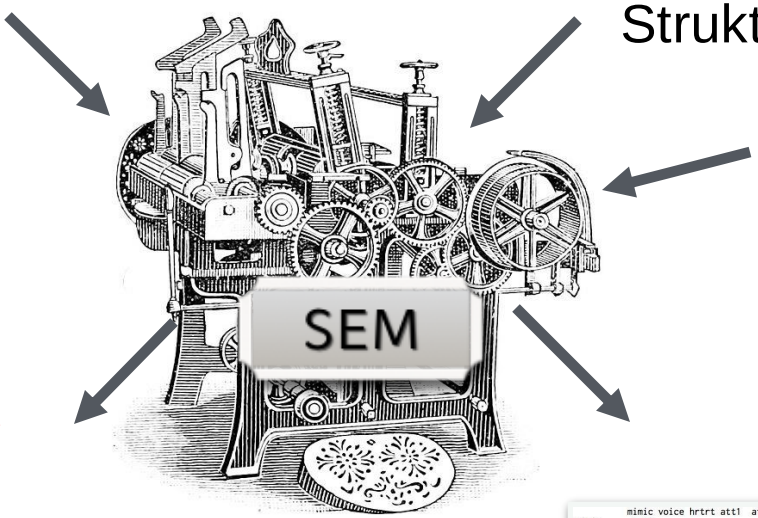
Was leistet die SEM-Maschine?

	mimic	voice	heartrate	att1
1	0.857	-0.167	-2.656	-1.032
2	-1.736	0.134	-0.725	0.636
3	-0.519	0.585	-1.422	0.037
4	2.195	0.820	1.869	0.743
5	2.221	0.278	0.099	-0.308
6	1.933	0.313	0.265	1.696

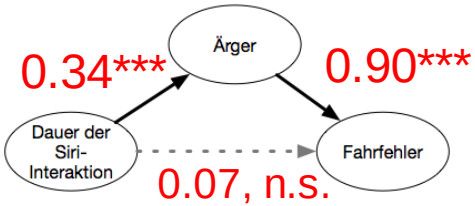
Empirische Daten



Kausale Strukturannahmen

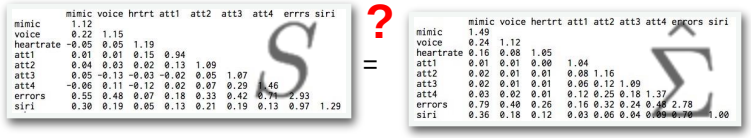


Weitere Annahmen: z.B. Linearität, keine Interaktionen, normal-verteilte Variablen



Quantifizierung der kausalen Pfade

Wenn die kausale Struktur tatsächlich so ist wie angenommen!



Einschätzung des Modell-Fit

Passt das Modell zu den Daten?

Ausblick: Einschätzung des Model-Fits

Die Realität liefert Daten

	mimic	voice	hrtrt	att1	att2	att3	att4	errrs	siri
mimic	1.12								
voice	0.22	1.15							
heartrate	-0.05	0.05	1.19						
att1	0.01	0.01	0.15	0.94					
att2	0.04	0.03	0.02	0.13	1.09				
att3	0.05	-0.13	-0.03	-0.02	0.05	1.07			
att4	-0.06	0.11	-0.12	0.02	0.07	0.29	1.46		
errors	0.55	0.48	0.07	0.18	0.33	0.42	0.71	2.93	
siri	0.30	0.19	0.05	0.13	0.21	0.19	0.13	0.97	1.29

Das Modell sagt Daten vorher

	mimic	voice	hertrt	att1	att2	att3	att4	errors	siri
mimic	1.49								
voice	0.24	1.12							
heartrate	0.16	0.08	1.05						
att1	0.01	0.01	0.00	1.04					
att2	0.02	0.01	0.01	0.08	1.16				
att3	0.02	0.01	0.01	0.06	0.12	1.09			
att4	0.03	0.02	0.01	0.12	0.25	0.18	1.37		
errors	0.79	0.40	0.26	0.16	0.32	0.24	0.48	2.78	
siri	0.36	0.18	0.12	0.03	0.06	0.04	0.09	0.70	1.00

S **empirische** Kovarianzmatrix ⟷ **modell-implizierte** Kovarianzmatrix $\hat{\Sigma}$

Welches Modell ist konsistent(er) zu den empirischen Daten?

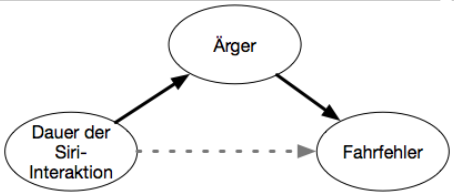
→ “Fit-Indizes”

χ^2 RMSEA GFI NFI CFI CAIC BIC PNFI WRMR SRMR RFI AGFI AIC … MECVI …

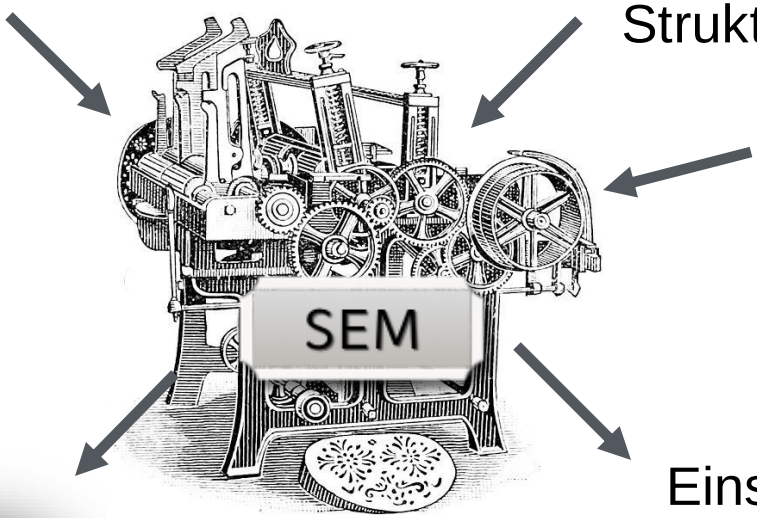
Ausblick: Einschätzung des Model-Fits

	mimic	voice	heartrate	att1
1	0.857	-0.167	-2.656	-1.032
2	-1.736	0.134	-0.725	0.636
3	-0.519	0.585	-1.422	0.037
4	2.195	0.820	1.869	0.743
5	2.221	0.278	0.099	-0.308
6	1.933	0.313	0.265	1.696

Empirische Daten

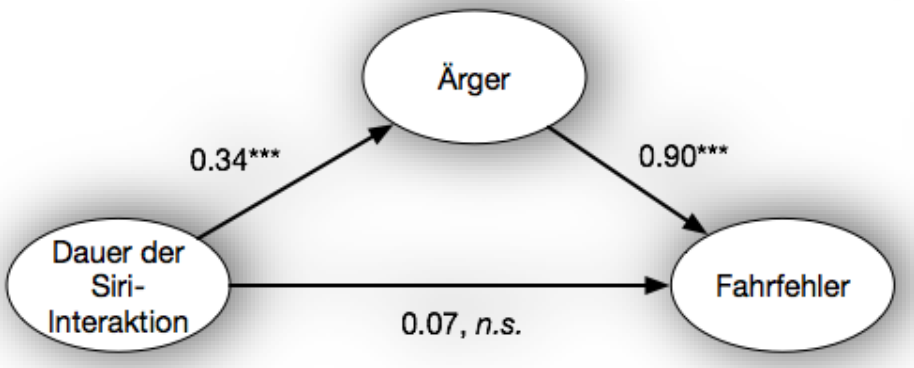


kausale Strukturannahmen



Weitere Annahmen: z.B. Linearität, keine Interaktionen, normal-verteilte Variablen

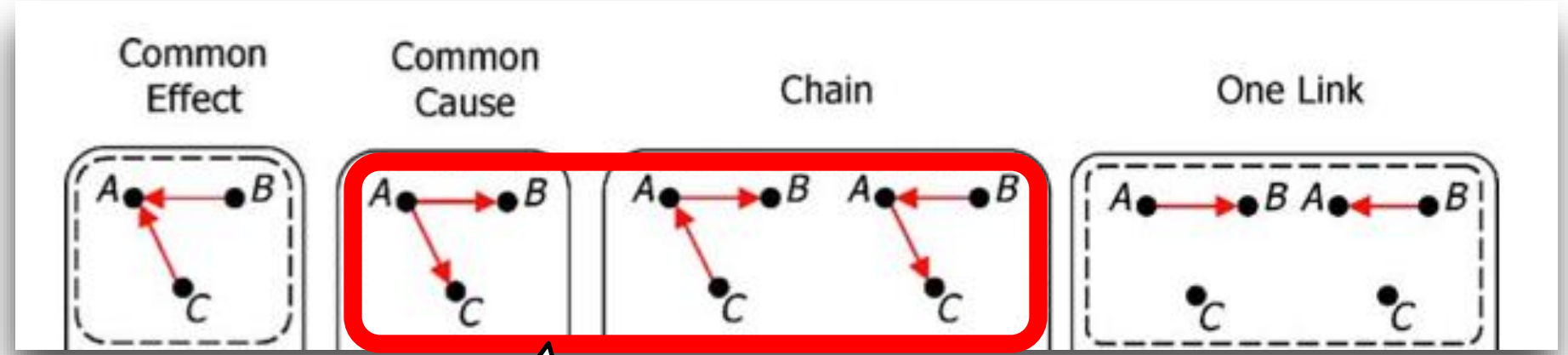
Quantifizierung der kausalen Pfade



Einschätzung des Modell-Fit

$\chi^2(4) = 4.338, p = .362$
CFI = 0.996
SRMR = 0.032
RMSEA = 0.024

Ausblick: Äquivalente Modelle



Steyvers, Tenenbaum, Wagenmakers, & Blum (2003)

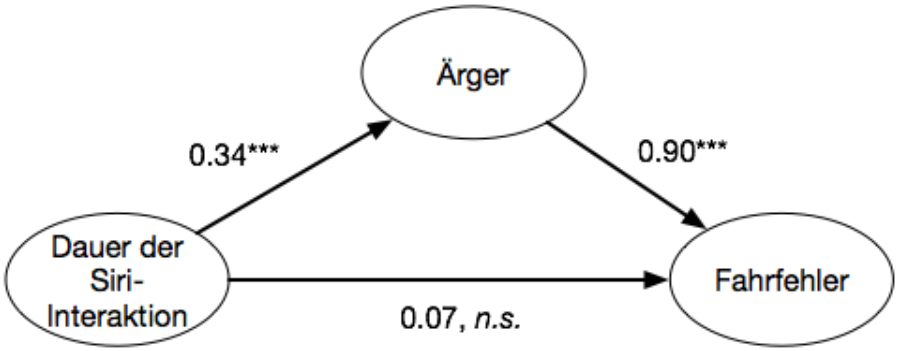
Markov-äquivalente Klasse

- Ohne weiteres Wissen kann aufgrund von Beobachtungsdaten nicht zwischen Markov-äquivalenten Strukturen entschieden werden
- Kausale Struktur wird a priori angenommen → Sind die Daten konsistent mit diesen Annahmen? → Daten sind gleich konsistent mit mehreren Modellen
- Der Nachweis von Kausalität ist keine Frage der Datenauswertung, sondern eine Frage des experimentellen Designs (z.B. durch Manipulation)

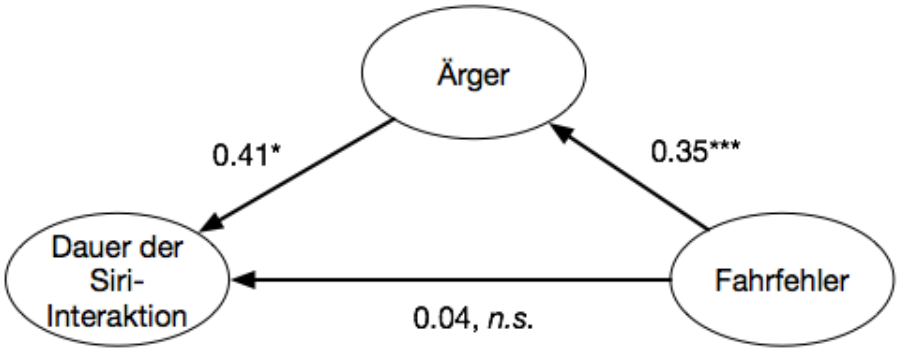
Steyvers, Tenenbaum, Wagenmakers, & Blum (2003); Raykov & Marcoulides (2001); Stelzl (1986)

Ausblick: Äquivalente Modelle (aufgrund der Daten nicht unterscheidbar)

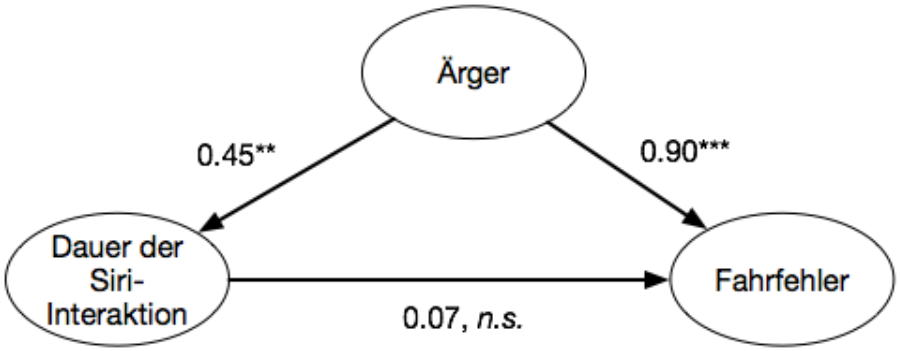
+ 3 weitere äquivalente Modelle!



$\chi^2(4) = 4.338$, $p = .362$
CFI = 0.996
SRMR = 0.032
RMSEA = 0.024



$\chi^2(4) = 4.338$, $p = .362$
CFI = 0.996
SRMR = 0.032
RMSEA = 0.024



$\chi^2(4) = 4.338$, $p = .362$
CFI = 0.996
SRMR = 0.032
RMSEA = 0.024

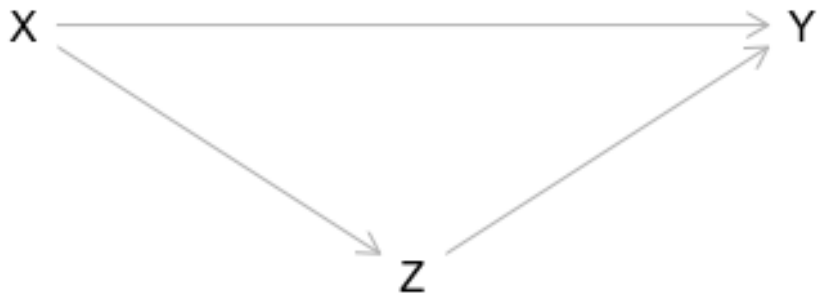
Thoemmes, F. (2015) Reversing Arrows in Mediation Models Does Not Distinguish Plausible Models, Basic and Applied Social Psychology, 37, 226-234.

Ausblick: Äquivalente Modelle (aufgrund der Daten nicht unterscheidbar)

- „If a model is consistent with reality, then the data should be consistent with the model. But if the data are consistent with the model, this does not imply that the model corresponds to reality.“ (Bollen 1989)

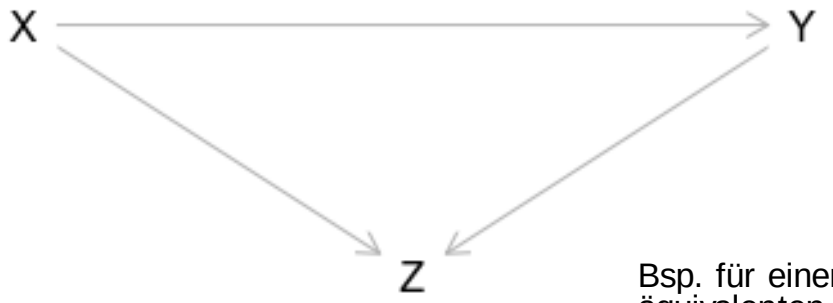
Exkurs: Äquivalente Kausale Modelle finden mit dem Dagitty Paket


```
> library(dagitty)
>
> dag <- dagitty('dag{
+   X -> Y
+   X -> Z -> Y
+   X[pos="1, 1"]
+   Y[pos="2, 1"]
+   Z[pos="1.5, 2"]
+   }')
>
> plot(dag)
```



Ursprünglicher DAG

```
> length(equivalentDAGs(dag))
[1] 6
> plot(equivalentDAGs(dag)[[2]])
```



Bsp. für einen äquivalenten DAG

Fazit SEM Einführung

- ✓ (Relativ) einfache Übersetzung: komplexes verbales Modell → formales Modell
- ✓ Latente Modellierung
- ✓ Berücksichtigung von Messfehlern

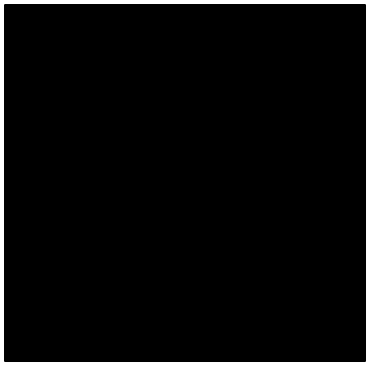
- Nur kausale Konsistenz prüfen - nicht Kausalstrukturen “beweisen”
- Es gibt immer äquivalente Modelle
- z.T. Kontroversen und kein Konsens um manche Fit-Indizes, Schätzmethoden, etc.

Übersicht: Allgemeine Definitionen und Grafische Darstellung von SEMs

- Auf den folgenden Folien, werden wir die wichtigsten Konventionen zur grafischen Darstellung von SEMs, sowie die Definition von damit verbundenen neuen Begriffen nochmal möglichst vollständig auflisten.
- Wir versuchen uns in unseren Veranstaltungen soweit wie möglich daran zu halten.
- Ein vielen Stellen verwenden wir Vereinfachungen der ausführlichen Notation, die hoffentlich aus dem Kontext nachvollziehbar sind.
- Hinweis: In der Praxis existieren sehr viele verschiedene Variationen für einzelne Details der grafischen Darstellungen von SEMs.

Manifeste Variable:

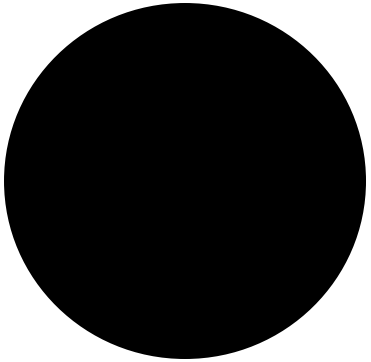
Variable, die direkt beobachtbar ist.



- Ein einzelnes Item in einem Fragebogen
- Ein „physisches“ Merkmal einer Person (Augenfarbe, Körpergröße, etc.)
- Sonstige beobachtbare Indikatoren wie Einkommen, Anzahl der Kinder, Studiengang)

Latente Variable:

Variable, die nicht direkt beobachtbar ist.



- bspw. psychologische Konstrukte wie Intelligenz oder Persönlichkeit (Neurotizismus, Need for Closure o.ä.)
- Nur indirekt beobachtbar, durch die Ausprägung auf einer manifesten Variable (die *ursächlich* auf die Ausprägung der latenten Variable zurückzuführen ist)

Zusammenhänge zwischen Variablen

Mögliche Verbindungen zwischen zwei Variablen

- **Gerichteter Zusammenhang:**
  - Grafisch: einfacher Pfeil 
  - Numerisch: Stärke eines gerichteten (linearen) Zusammenhangs = Regressionsgewicht (synonym: Ladung, Gewicht, Pfad)
  - Kausale Interpretation: direkter kausaler Effekt
- **Ungerichteter Zusammenhang**:
  - Grafisch: Doppelpfeil 
  - Numerisch: Stärke eines ungerichteten Zusammenhangs = Kovarianz/Korrelation
  - Kausale Interpretation: Abgekürzte Notation für fehlenden Confounder (d.h. X <-> Y äquivalent zu X <- U -> Y mit U unbekannt)

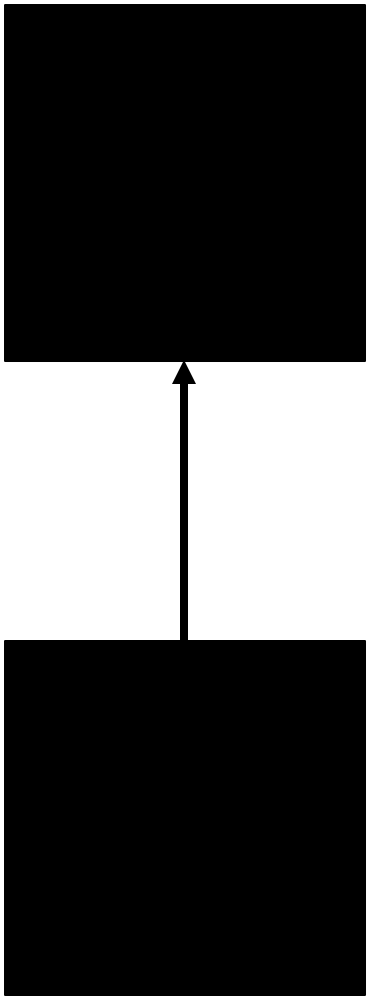
- Ein (gerichteter) Zusammenhang muss theoretisch begründet sein!

Endogene und exogene Variablen

Endogene Variable = abhängige Variable:

Variable, die durch andere Variablen erklärt/beeinflusst wird

- die meisten manifesten Variablen
- manche latenten Variablen
- grafisch: mind. 1 *gerichteter* Pfeil zeigt auf die endogene Variable (Doppelpfeile gelten nicht!)
- Benötigen zugehörige Fehlervariable (da wir nie Variablen *perfekt* aus anderen vorhersagen)

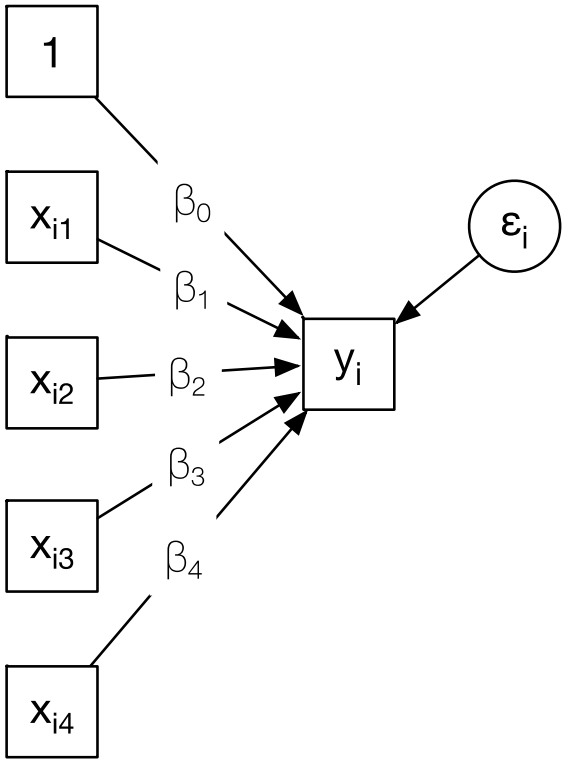


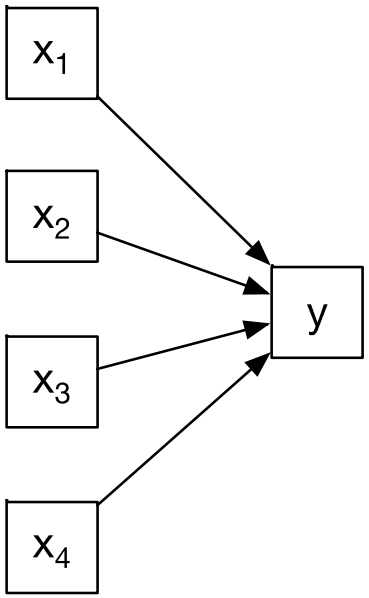
Exogene Variable = unabhängige Variable:

Variable, die nicht durch andere Variablen erklärt/beeinflusst wird

- alle Residuen/Fehlervariablen
- manche latente Variablen
- manche manifeste Variablen
- grafisch: kein gerichteter Pfeil zeigt auf die exogene Variable

Intuition zu Fehlervariablen: Multiple lineare Regression als SEM





Vereinfachte Darstellung:
- ohne Intercept
- ohne Personenindex *i*
- Manchmal ohne Fehlervariable ϵ

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \epsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Exkurs: Multiple lineare Regression mit SEM Software schätzen


```
> n <- 1000
> b0 <- 0
> b1 <- 1
> b2 <- 2
> b3 <- 3
> b4 <- 4
> set.seed(1)
> x1 <- rnorm(n)
> x2 <- rnorm(n)
> x3 <- rnorm(n)
> x4 <- rnorm(n)
> y <- rnorm(n, mean = b0 + b1 * x1 +
+     b2 * x2 + b3 * x3 + b4 * x4)
> dat <- data.frame(x1 = x1, x2 = x2,
+   x3 = x3, x4 = x4, y = y)
```

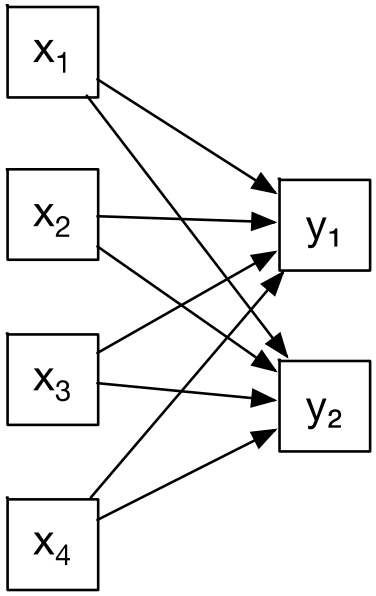
Analyse mit Linearer Regression

```
> coef(lm(y ~ x1 + x2 + x3 + x4))
(Intercept)          x1          x2          x3          x4
-0.01924457  0.96671025  2.01083692  2.92940219  4.00300811
```

Analyse als Pfadmodell

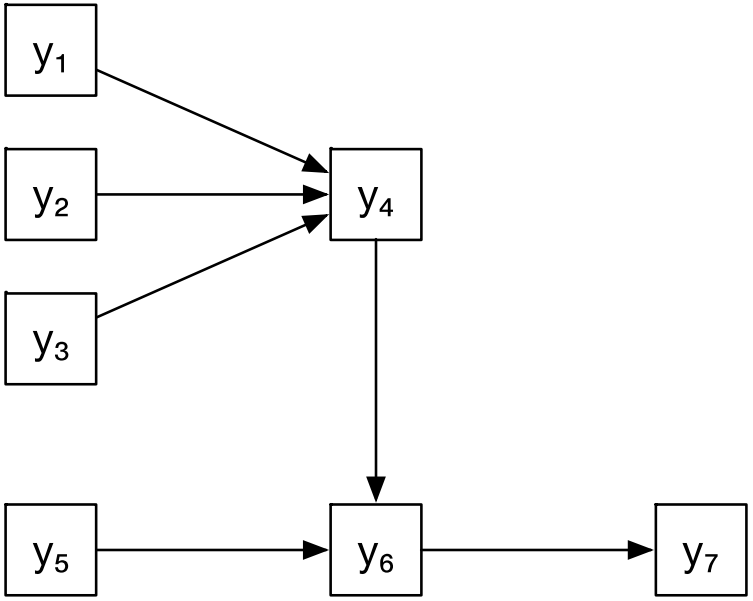
```
> library(lavaan)
>
> model <- "
+   y ~ x1 + x2 + x3 + x4
+ "
> fit <- sem(model, data = dat,
+   meanstructure = TRUE)
> coef(fit)
  y~x1   y~x2   y~x3   y~x4   y~~y    y~1
 0.967  2.011  2.929  4.003  0.971 -0.019
```

Exkurs: Multivariate multiple lineare Regression



Intuition zu Fehlervariablen: Gleichungssysteme in Pfadanalysen

- Pfadanalyse: Modelliert kausale Beziehungen zwischen beobachteten Variablen -> alle Variablen sind beobachtet (manifest), bis auf die Fehler
- Entspricht einem System von (linearen) Regressionsgleichungen



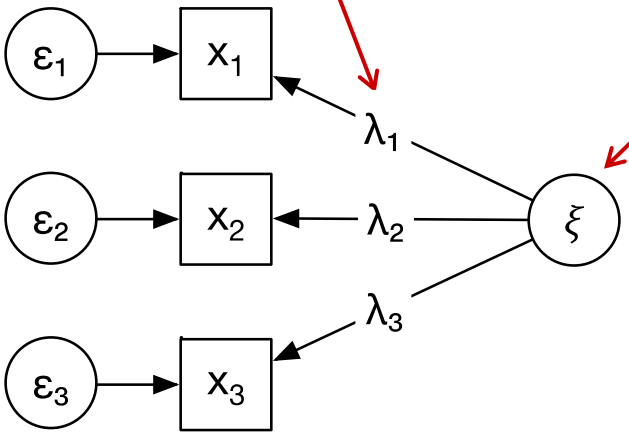
$$y_4 = \beta_{01} + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + e_1$$
$$y_6 = \beta_{02} + \beta_4 y_4 + \beta_5 y_5 + e_2$$
$$y_7 = \beta_{03} + \beta_7 y_6 + e_3$$

Beispiel I
Latente Variablen: Messmodell

Ladung *„lambda“* (Pfadkoeffizient, Regressionsgewicht) der latenten Variable auf eine manifeste Variable, gerichteter Pfeil

exogene latente Variable *„xi“* (kein Pfeil zeigt darauf), nicht beobachtbar, nicht durch eine andere Variable erklärt

Latente Fehlervariable *„epsilon“*, bei allen endogenen Variablen (min. ein Pfeil zeigt darauf)



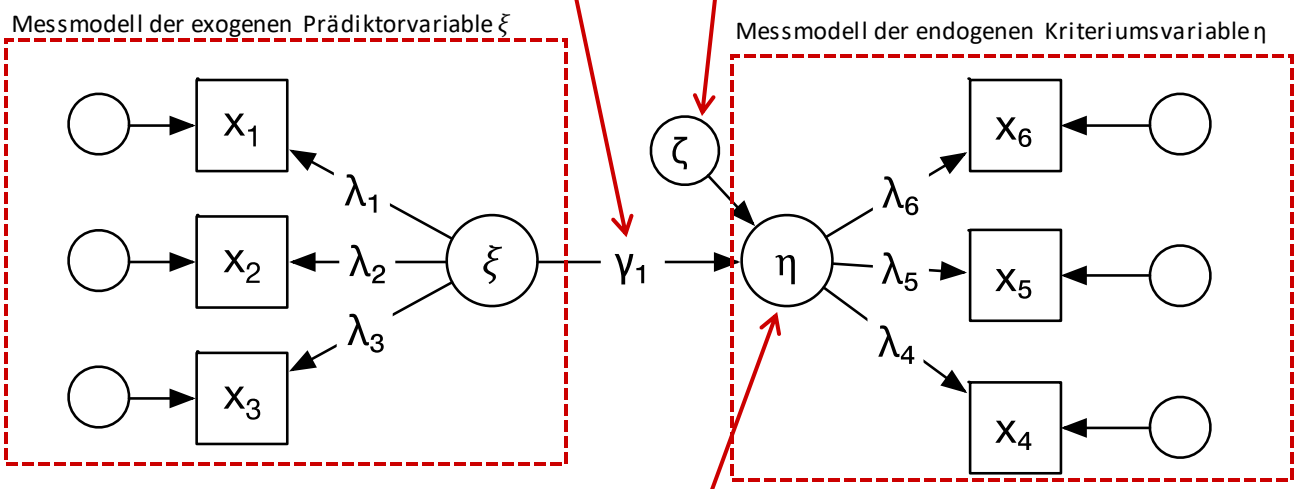
Manifeste (=beobachtete) Variable *X*

Beispiel II Strukturgleichungsmodell

- Kausale Beziehungen zwischen latenten Variablen

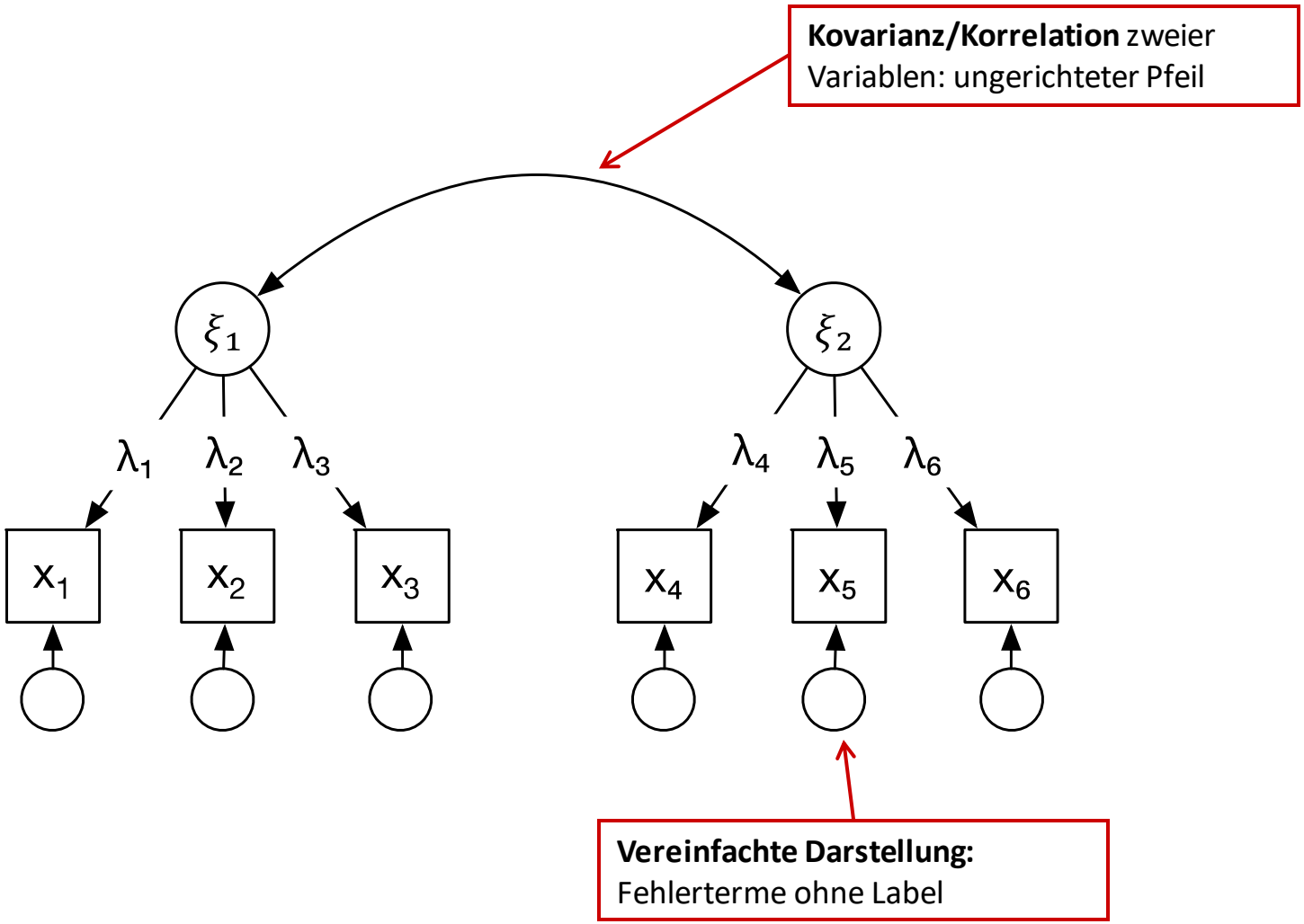
Gerichtete Ladung/Pfadkoeffizient zwischen latenten Variablen („*gamma*“)

Latente Fehlervariable „*zeta*“, einer endogenen latenten Variable: Welcher Varianzanteil in η kann nicht durch ξ erklärt werden?

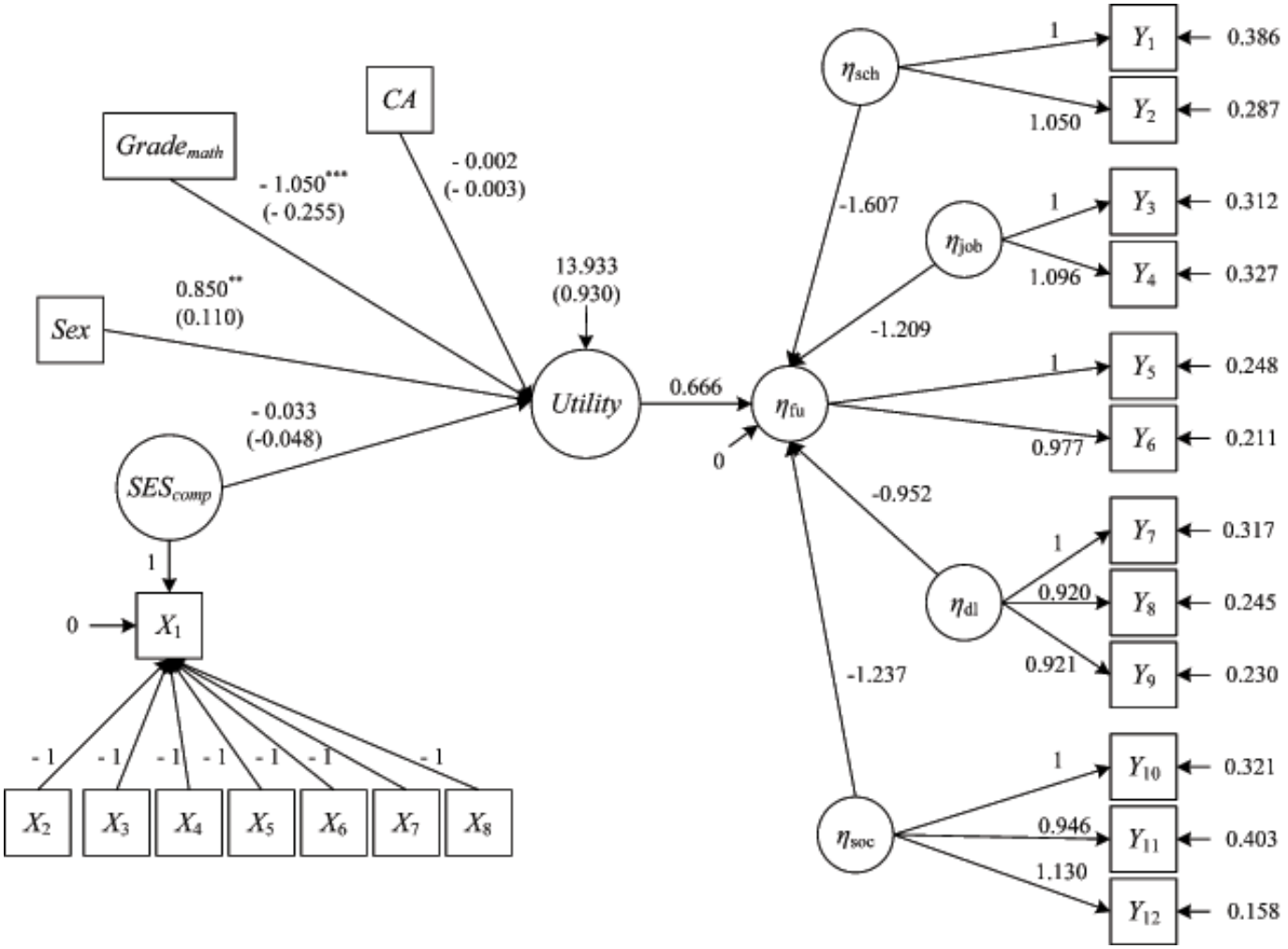


endogene latente Variable „*eta*“ (mind. ein Pfeil zeigt darauf), nicht direkt beobachtbar, aber durch Indikatoren gemessen und durch eine andere Variable (hier: „*xi* “) erklärt

Beispiel III
Confirmatory Factor Analysis (CFA)



Beispiel für komplexes SEM



https://doi.org/10.1525/collabra.143

Zusammenfassung der Bezeichnungen im Grafischen Modell

□	beobachtete, so genannte manifeste Variable
○	latente Variable/Fehlervariable
⇔	Kovarianz oder Korrelation
←	semipartielles Regressionsgewicht oder Ladung (λ, Lambda) für Items und γ (Gamma) für latente Variablen
ε	Fehlervariable einer manifesten Variablen (Epsilon)
ζ	Fehlervariable einer latenten abhängigen Variablen (Zeta)
ξ	latente unabhängige Variable (Ksi), von der ein Pfeil ausgeht und auf die kein Pfeil zeigt
η	latente abhängige Variable (Eta), auf die ein Pfeil zeigt
X	Indikatoren der latenten Variablen