SEM 4:
Modellfit & Modellvergleiche

Kovarianzmatrix – Eine gute Abbildung der empirischen Daten?

- Die Modellparameter wurden mithilfe von z.B. ML-Schätzung optimiert, so dass sie so gut wie möglich die empirischen Daten abbilden. Zwei Fragen:
- Ist „so gut wie möglich“ auch „gut genug“? → Modellfit-Indizes
- Wenn ich zwei Modelle miteinander vergleiche – welches kann die Daten besser abbilden? → Modellvergleiche

Empirische Kovarianzmatrix

S	x1	x2	x3
x1	*1.36*	*0.41*	*0.58*
x2	–	*1.39*	*0.45*
x3	-	-	*1.28*

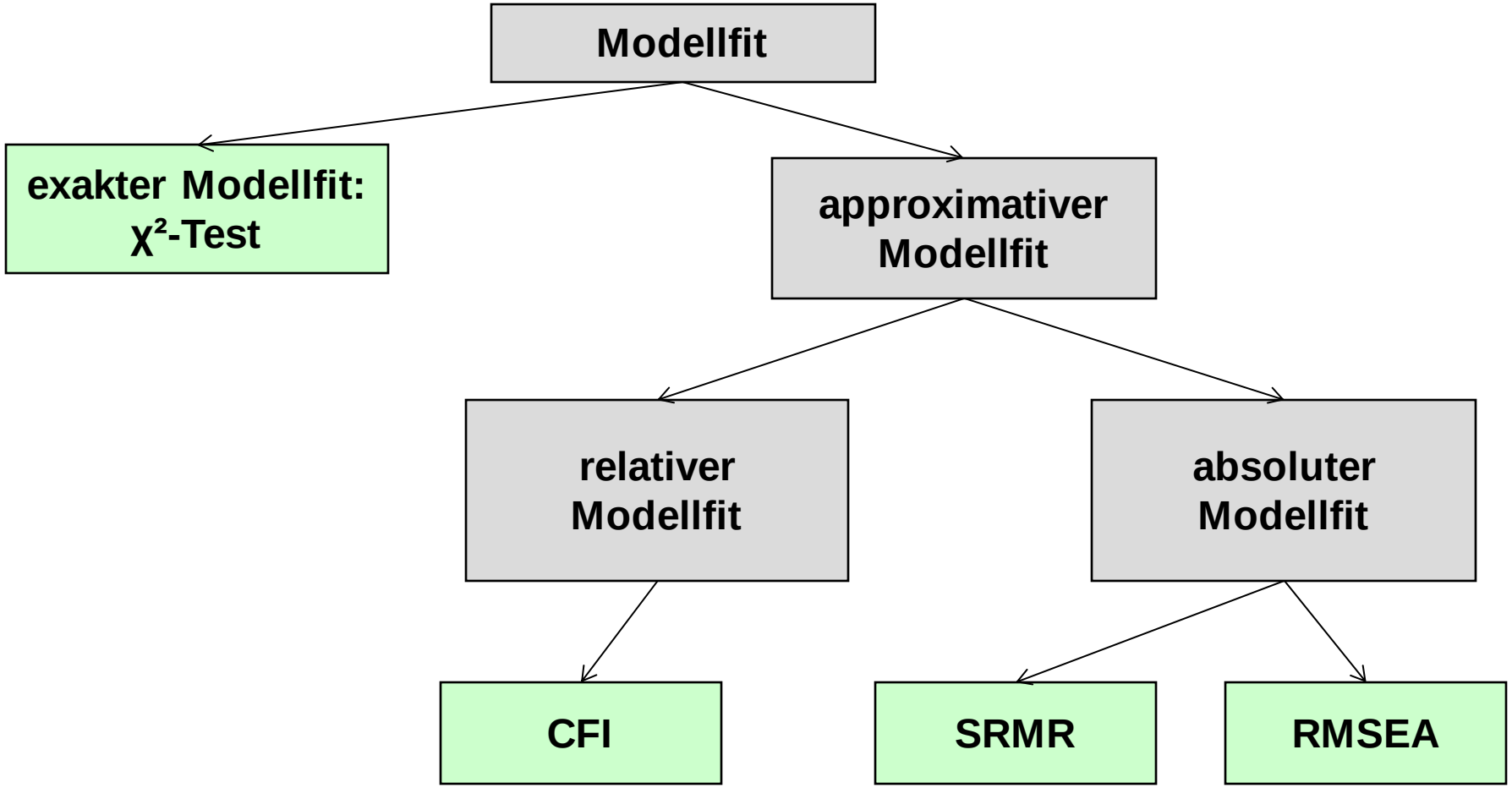
Implizierte Kovarianzmatrix von Modellparameter-Set 2:

$\hat{\Sigma}(\Theta_2)$	x1	x2	x3
x1	*1.3*	*0.48*	*0.48*
x2	–	*1.4*	*0.48*
x3	-	-	*1.3*

Näher kommt man mit einer Parameteroptimierung innerhalb dieses spezifischen Strukturmodells nicht an die empirischen Daten heran ...

Modelltest & Fit-Indizes

Übersicht Fit-Indizes



Exakter Modell-Fit

Exakter Modell-Fit (exact fit): χ^2-Test. Leitet sich aus Minimum der Diskrepanzfunktion ab:

$$(N-1)F_{ML}\left[S, \Sigma\left(\widehat{\Theta}\right)\right] \sim \mathrm{X}^2(df) \; mit \; df = p - q$$

p: Anzahl bekannter Parameter

q: Anzahl zu schätzender Parameter

N: Anzahl der Versuchspersonen

- Die Hypothesen lauten hierbei:
  - H_0: $\Sigma = S$
  - H_1: $\Sigma \neq S$

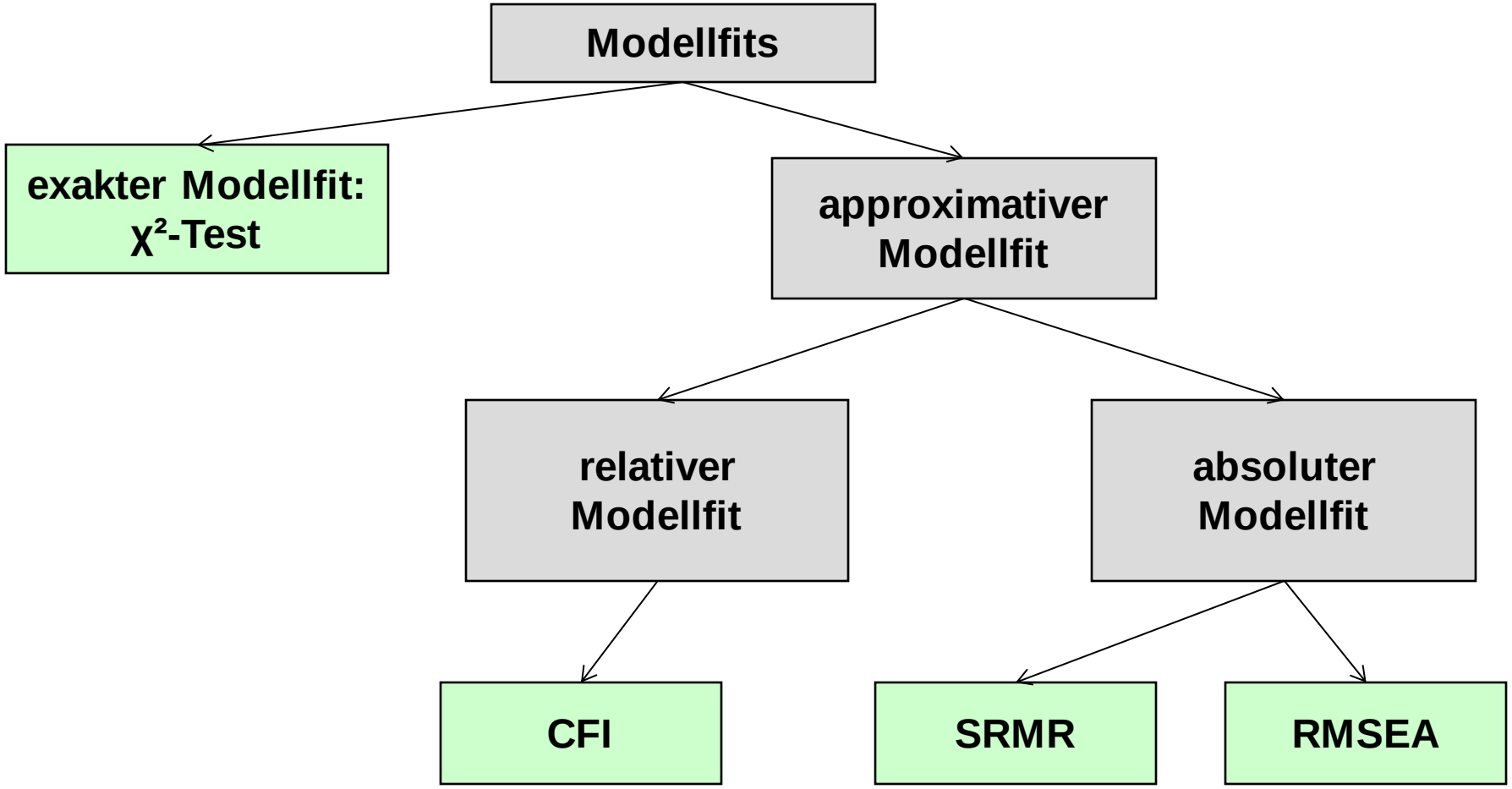
- D.h.: Der finale Wert der ML-Diskrepanzfunktion wird mit (N-1) multipliziert; unter der H_0 ist dieser Wert χ^2-verteilt mit $df = p - q$
- Ergibt der Signifikanztest für diesen χ^2-Wert $p < .05$ wird die H_0 abgelehnt → die modell-implizierte Kovarianzmatrix weicht signifikant von der empirischen ab. Bzw.: Wenn der Test *nicht* signifikant wird, spricht das für einen guten Fit.

Power des χ^2-Test

Die Teststärke (Power) des χ^2-Tests steigt mit der Stichprobengröße an:

- Große Stichproben: Schon geringe Abweichungen (Residuen zwischen implizierter und empirischer Kovarianz-Matrix) von einem perfekten Modell-Fit können zur Ablehnung des Modells führen.
- Kleine Stichproben: Auch große Abweichungen von einem perfekten Modell führen nicht zwangsläufig zur Ablehnung des Modells.
- Test ist also sehr abhängig von der Stichprobengröße; Interpretation muss im Licht der Stichprobengröße geschehen.

Übersicht Fit-Indizes



Approximative Fit-Indizes

1. Absolute Fit-Indizes: Quantifizieren, wie gut ein Modell die Daten reproduziert; es wird kein Vergleichsmodell benötigt
2. Relative Fit-Indizes: Vergleich mit einem Nullmodell (auch Independence-Modell genannt), in dem alle Variablen unkorreliert sind (d.h., es gibt außer den Fehlertermen keine latenten Variablen und keine Zusammenhänge zwischen den Variablen).
   - Das Nullmodell hat üblicherweise einen sehr schlechten Fit
   - Relative Fit-Indizes geben die proportionale Verbesserung der Anpassung gegenüber einem restriktiveren Nullmodell an.

Welche Indizes?

Beauducel und Wittmann (2005) empfehlen folgende Angaben:

- X^2-Wert + Überschreitungswahrscheinlichkeit
- RMSEA
- SRMR
- CFI

Root-Mean-Square-Error of Approximation (RMSEA)

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\chi^2 - df}{N \cdot df}}$$

- Der RMSEA ist ein absoluter Fit-Index
- Der Wertebereich liegt zwischen 0 und 1; der optimale Wert beträgt Null
- Typische Empfehlung (nach Hu &Bentler, 1998):
  RMSEA ≤ .06 bei N > 250; ≤ .08 bei N < 250
- Der RMSEA ist sensitiv gegenüber fehlspezifizierten Ladungen und Pfaden
- Berücksichtigt sowohl Stichprobengröße als auch Modellkomplexität
- Je komplexer ein Modell, desto weniger Freiheitsgrade → N*df im Nenner wird kleiner → RMSEA wird größer. D.h.: sparsame Modelle werden vom RMSEA belohnt

Standardized-Root-Mean-Residual (SRMR)

- Der SRMR ist ein absoluter Fit-Index
- Wertebereich liegt zwischen 0 und 1; der optimale Wert beträgt Null
- Der SRMR gibt durchschnittliche Abweichungen der beobachteten von der implizierten Korrelationsmatrix an (standardisiertes Maß)
- r_{jk} = Differenz zwischen dem beobachteten und dem geschätzten Korrelationskoeffizient in allen Zellen der Matrix; p = Anzahl der manifesten Variablen; S = modellimplizierte Standardabweichung/Kovarianz; σ = aus Stichprobe geschätzte Standardabweichung/Kovarianz
- Typische Empfehlung (nach Hu & Bentler, 1998): SRMR < 0.11
- Im Gegensatz zum RMSEA berücksichtigt der SRMR weder Modellkomplexität noch die Stichprobengröße
- SRMR hoch → Prüfen, ob Kovarianz zwischen latenten Variablen nötig sind oder ein oder mehrere weitere Faktoren/latente Variablen nötig sind.

$$SRMR = \sqrt{\sum_{j}\sum_{k<j}\frac{r_{jk}^2}{e}}$$

$$r_{jk} = \frac{S_{jk}}{S_j \cdot S_k} - \frac{\hat{\sigma}_{jk}}{\hat{\sigma}_j \cdot \hat{\sigma}_k}$$

$$e = \frac{p \cdot (p+1)}{2}$$

Comparative-Fit-Index (CFI)

$$CFI = 1 - \frac{\chi^2_M - df_M}{\chi^2_N - df_N}$$

- Der CFI ist ein relativer Fit-Index
- Der CFI nimmt einen Vergleich des getesteten Modells mit einem restriktiveren Nullmodell vor
  - Nullmodell: Alle manifesten Variablen sind unkorreliert, es gibt keine latenten Variablen
- χ^2_M: Teststatistik des eigentlichen Modells; χ^2_N: Teststatistik des Nullmodells
- Der Wertebereich liegt zwischen 0 und 1; der optimale Wert beträgt 1
- Typische Empfehlung (nach Hu & Bentler, 1998): CFI sollte > 0.95 sein
- Vorteil: insensitiv gegenüber der Stichprobengröße

Cut-Off Werte zur Testentscheidung

Beauducel und Wittmann (2005), nach Hu und Bentler (1998, 1999), empfehlen folgende Cut-Off Werte bei einer Schätzung nach der ML-Methode:

- RMSEA ≤ .06 bei N > 250; ≤ .08 bei N < 250
- SRMR ≤ .11
- CFI > .95
- χ^2-Wert mit df und zugehörigem p-Wert

Achtung:

- Fit-Indizes können sich aufgrund der angewandten Methode (z.B. zwischen GLS, ML oder ADF) stark unterscheiden!
- Ein Modell mit ausgezeichnetem statistischen Fit kann inhaltlich völlig sinnfrei sein!
- Die Hu & Bentler-Cutoffs sind umstritten (vgl. Heene et al., 2011). Sie sind in der aktuellen SEM-Literatur jedoch Quasistandard. Am zuverlässigsten entdeckt immer noch der χ^2-Test Fehlspezifikationen im Modell.

Lokaler Parametertest

- Führt die Bewertung des Gesamtmodells zu einem positiven Ergebnis (das Modell wurde nicht abgelehnt), dann stellt sich die Frage, ob sich jeder einzelne geschätzte Parameter signifikant von null unterscheidet.

→ Achtung, häufiger Irrtum: Ein global passendes Modell impliziert nicht, dass alle Pfade signifikant sind!

- Jeder geschätzte Modellparameter (Varianz einer exogenen latenten Variable, Pfadkoeffizient, ...) lässt sich testen:
  - H_0: der Parameter unterscheidet sich nicht von Null.
  - H_1: der Parameter unterscheidet sich von Null.

Signifikanztest einzelner Modellparameter: Critical Ratio

- Signifikanztest für einzelne Modellparameter:
  - H_0: Parameter = 0
  - Zur Überprüfung der H_0 wird eine Teststatistik berechnet: Die *Critical Ratio* C.R. ist der geschätzte Modellparameter geteilt durch seinen geschätzten Standardfehler:

$$C.R. = \frac{\hat{q}}{se_q}$$

- Falls die H_0 gilt (und die manifesten Variablen eine multivariate NV in der Population aufweisen), dann ist C.R. eine standardnormalverteilte Variable → z-Wert
- Fällt C.R. außerhalb eines Intervalls von ± 1.96/2.58, so kann die H_0 verworfen werden: der Modellparameter weicht signifikant von null ab (bei α = 5% bzw. 0.5%).

Beispiel

```
> summary(fit, standardized = T, fit.measures = T)
lavaan (0.6-1) converged normally after  35 iterations

  Number of observations                           301

  Estimator                                         ML
  Model Fit Test Statistic                      85.306
  Degrees of freedom                                24
  P-value (Chi-square)                           0.000

Model test baseline model:

  Minimum Function Test Statistic              918.852
  Degrees of freedom                                36
  P-value                                        0.000

User model versus baseline model:

  Comparative Fit Index (CFI)                    0.931
  Tucker-Lewis Index (TLI)                       0.896

Loglikelihood and Information Criteria:

  Loglikelihood user model (H0)              -3737.745
  Loglikelihood unrestricted model (H1)      -3695.092

  Number of free parameters                         21
  Akaike (AIC)                                7517.490
  Bayesian (BIC)                              7595.339
  Sample-size adjusted Bayesian (BIC)         7528.739

Root Mean Square Error of Approximation:

  RMSEA                                          0.092
  90 Percent Confidence Interval          0.071  0.114
  P-value RMSEA <= 0.05                          0.001

Standardized Root Mean Square Residual:

  SRMR                                           0.065
```

χ^2 df p CFI $RMSEA$ $SRMR$

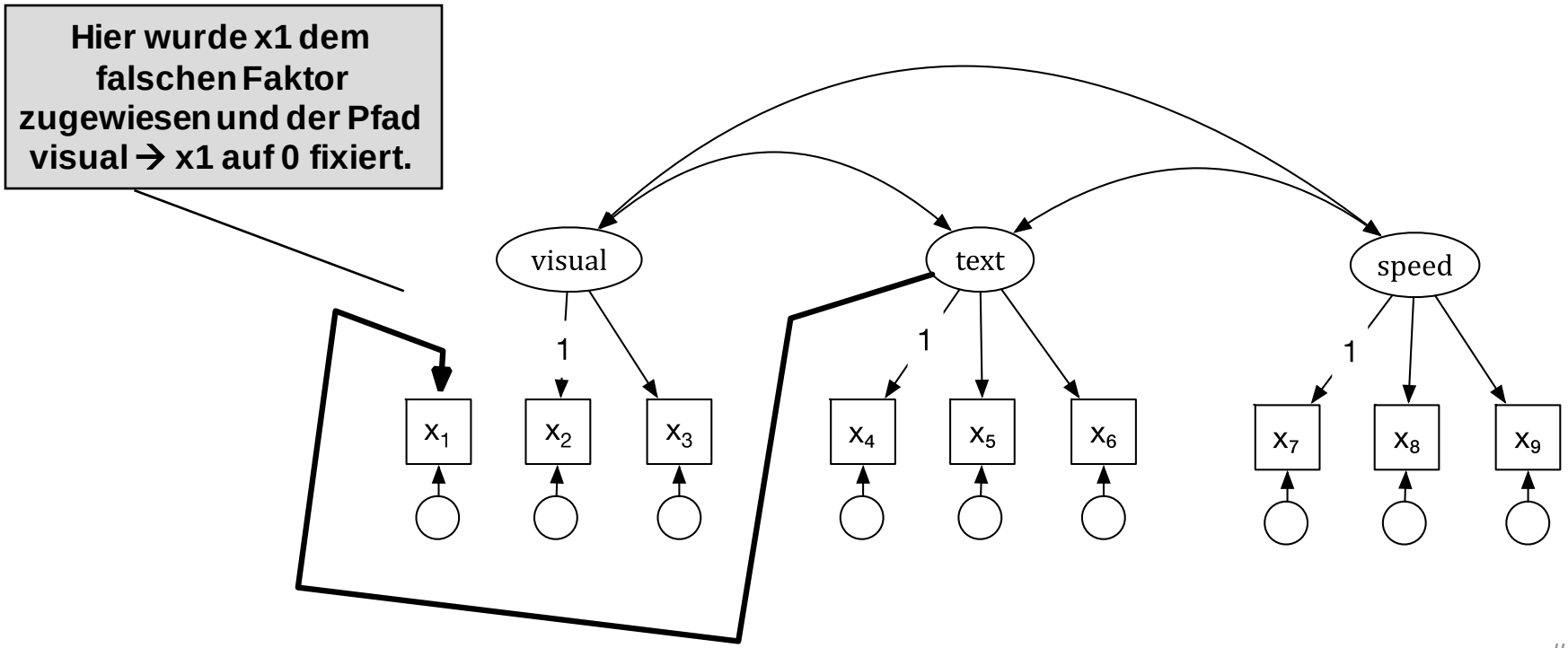
$\hat{\theta}$ se_θ $c.r.$ p

```
Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  visual =~
    x1                1.000                               0.900    0.772
    x2                0.554    0.100    5.554    0.000    0.498    0.424
    x3                0.729    0.109    6.685    0.000    0.656    0.581
  textual =~
    x4                1.000                               0.990    0.852
    x5                1.113    0.065   17.014    0.000    1.102    0.855
    x6                0.926    0.055   16.703    0.000    0.917    0.838
  speed =~
    x7                1.000                               0.619    0.570
    x8                1.180    0.165    7.152    0.000    0.731    0.723
    x9                1.082    0.151    7.155    0.000    0.670    0.665

Covariances:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  visual ~~
    textual           0.408    0.074    5.552    0.000    0.459    0.459
    speed             0.262    0.056    4.660    0.000    0.471    0.471
  textual ~~
    speed             0.173    0.049    3.518    0.000    0.283    0.283

Variances:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
   .x1                0.549    0.114    4.833    0.000    0.549    0.404
   .x2                1.134    0.102   11.146    0.000    1.134    0.821
   .x3                0.844    0.091    9.317    0.000    0.844    0.662
   .x4                0.371    0.048    7.779    0.000    0.371    0.275
   .x5                0.446    0.058    7.642    0.000    0.446    0.269
   .x6                0.356    0.043    8.277    0.000    0.356    0.298
   .x7                0.799    0.081    9.823    0.000    0.799    0.676
   .x8                0.488    0.074    6.573    0.000    0.488    0.477
   .x9                0.566    0.071    8.003    0.000    0.566    0.558
    visual            0.809    0.145    5.564    0.000    1.000    1.000
    textual           0.979    0.112    8.737    0.000    1.000    1.000
    speed             0.384    0.086    4.451    0.000    1.000    1.000
```

Modifikationsindizes

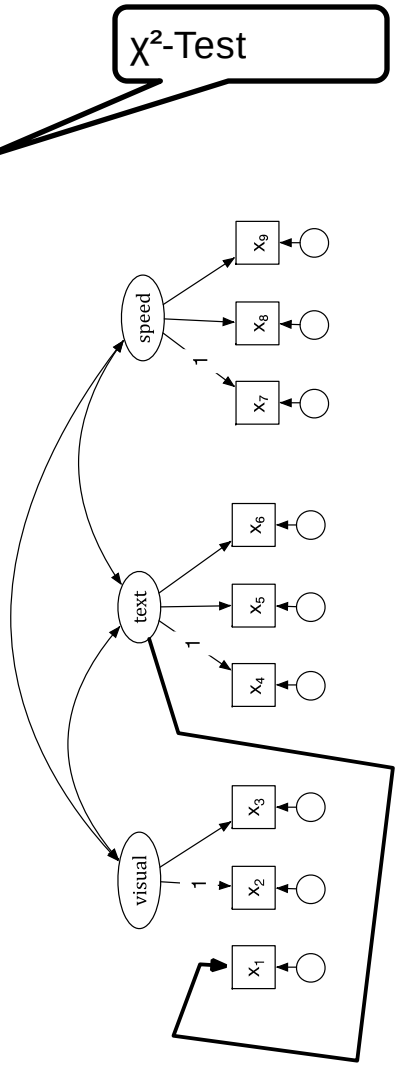
Modifikationsindizes

- Jeder fixierte oder eingeschränkte Parameter (constraints) verringert die Flexibilität in der Struktur der implizierten Kovarianzmatrix → sobald man einen bisher fixierten Parameter freigibt, verbessert sich der Fit
- Modifikationsindizes geben einen Überblick, wie sich der Modellfit verbessert, wenn man einen fixierten Parameter freigibt



Modifikationsindizes

```
Number of observations                        301

  Estimator                                    ML
  Minimum Function Test Statistic          141.549
  Degrees of freedom                            24
  P-value (Chi-square)                       0.000

User model versus baseline model:

  Comparative Fit Index (CFI)                0.867

Root Mean Square Error of Approximation:

  RMSEA                                      0.128

Standardized Root Mean Square Residual:

  SRMR                                       0.097
```



Modifikationsindizes

Parameter, den man „befreien“ könnte

mi = modification index: Ungefähre Verbesserung (d.h.: Verkleinerung) der χ^2-Statistik, wenn man den Parameter frei lässt → die faktische Verbesserung kann von diesem Wert abweichen!

epc = expected parameter change: Welchen Wert hätte der Modellparameter (ungefähr), wenn er frei geschätzt würde?

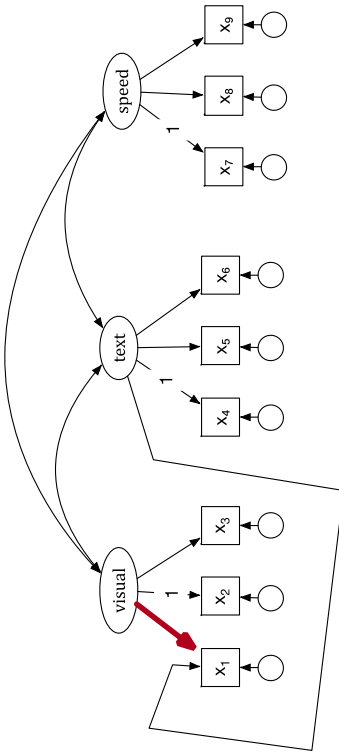
```
> modindices(fit3, sort.=TRUE, standardized=FALSE)
      lhs op rhs     mi    epc
28 visual =~  x1 59.521  1.202
54     x3 ~~  x1 31.842  0.361
76     x7 ~~  x8 24.610  0.569
31 visual =~  x9 24.364  0.730
75     x1 ~~  x9 20.874  0.244
42  speed =~  x1 19.267  0.530
29 visual =~  x7 12.962 -0.570
52     x3 ~~  x5 12.281 -0.173
26 visual =~  x5 11.692 -0.416
```

Modifikationsindizes


```
Number of observations                                301

  Estimator                                            ML
  Minimum Function Test Statistic          ~~141.549~~ 75.439
  Degrees of freedom                            ~~24~~ 23
  P-value (Chi-square)                              0.000

User model versus baseline model:

  Comparative Fit Index (CFI)              ~~0.867~~ 0.941

Root Mean Square Error of Approximation:

  RMSEA                                    ~~0.128~~ 0.087

Standardized Root Mean Square Residual:

  SRMR                                     ~~0.097~~ 0.061
```

visual ~= x1: estimate = 1.239

$\Delta\chi^2 = 66$



Modifikationsindizes

- Nur MIs > 5 (oder, je nach Autor, > 10) sollten überhaupt in Betracht gezogen werden. Alles darunter ist vermutlich nur Rauschen
- Die Modifikationen sollten theoriegeleitet Sinn machen (→ allerdings: warum hat man es dann nicht gleich so in das Modell eingebaut?). Jede Modifikation am Strukturmodell ändert die zugrundeliegende Theorie!
- Jede datengeleitete Modifikation ist als explorativ anzusehen, und sollte in einer frischen Stichprobe kreuzvalidiert werden.
- „It is shown that even under favorable conditions, models arising from **specification searches** must be viewed with caution“ (McCallum, 1986)
  - specification search = solange mit Hilfe der Modifikationsindizes rumspielen, bis das Modell einen akzeptablen Fit hat.

MacCallum, R. (1986). Specification searches in covariance structure modeling. Psychological Bulletin, 100, 107-120

Modelltest Voraussetzungen

Voraussetzungen:

1. Linearität
2. Zutreffen der angenommenen Verteilungen
3. Keine (Multi-) Kollinearität
4. Ausreichende Stichprobengröße
5. Angemessene Anzahl von Indikatoren pro latenter Variable

Modelltest Voraussetzungen

Linearität: SEM nur dann sinnvoll, wenn

- die Zusammenhänge linear sind.
- keine Ausreißer vorliegen.
  Streudiagramme, Boxplots, Histogramme checken!

Verteilungsannahmen: Siehe Folien zu Schätzmethoden (Vorlesung SEM 3)

Keine (Multi-) Kollinearität

- Von (Multi-) Kollinearität wird gesprochen, wenn zwei oder mehrere Items sehr hoch miteinander korrelieren.
- Sehr hoch korrelierende Indikatoren eines Faktors können insbesondere im Rahmen vom ML-Schätzungen zu Schätzproblemen führen: keine Konvergenz, d.h. keine Parameterschätzungen
- Daher sollte als ungefähre Richtlinie darauf geachtet werden, dass keine sehr hoch korrelierenden ($r > .85$) Items als Indikatoren verwendet werden.
- Streng genommen stellt (Multi-) Kollinearität keine Verletzung von Modellannahmen dar, führt aber praktisch häufig zu Konvergenzproblemen.

Stichprobengröße

- Bei SEM können bei kleinen Stichproben Schätzprobleme auftreten.
- Stichprobengrößen:
  - Marsh, Hau, Balla und Grayson (1998) empfehlen Stichprobengrößen von N > 100 für ML Schätzer.
  - Kline (2005) and Weston & Gore (2006): N > 200
  - Andere Empfehlung: mindestens n=10 pro geschätztem Modellparameter
  - Benötigtes N hängt ab von Modellkomplexität, durchschnittlicher Ladungshöhe, Verteilungsverletzungen, ...
  - Am empfehlenswertesten sind Poweranalysen für ein konkretes Modell mit hypothetischen Ladungshöhen (z.B. mit dem simsem package; Pornprasertmanit, 2014)

Anzahl von Indikatoren pro latenter Variable

- Anzahl von Items pro latenter Variable wirkt sich auf die Ergebnisse einer CFA aus.
  - Empfehlung: Es sollten mindestens vier Items pro latenter Variable vorhanden sein.
  - ➢ Identifizierbarkeit des Modells wird damit erhöht.

- Mehr Items pro Faktor führen (Marsh, Hau, Balla & Grayson, 1998)
  - häufiger zu angemessenen Lösungen.
  - zu exakteren und stabileren Parameterschätzungen.
  - zu weniger nicht-konvergierenden Lösungen.
  - zu reliableren Faktoren.

Kritische Anmerkung zur Modelltestung

Kritik an Cut-Off Werten

Hu und Bentler (1999) schlagen folgende Cutoff-Werte für ML-Schätzalgorithmus vor (vgl. Beauducel & Wittmann, 2005):

- RMSEA < 0.06 bei N > 250; < 0.08 bei N ≤ 250
- SRMR < 0.11
- CFI > 0.95

Sind diese Cutoff-Werte nun generalisierbar?

Marsh (2004): „…there is some evidence to suggest that even the old cutoff values are overly demanding in relation to a normative criterion of appropriateness based on the best existing psychological instruments. (…) [the] cutoff values proposed by Hu and Bentler (1998, 1999) appear to be largely unobtainable in appropriate practice".

Kritik an Cut-Off Werten

Hu und Bentler (1999):

Cutoff-Grenzen stammen aus Simulationen mit Modellen, deren Faktorladungen .70 bis .80 betragen haben.

Empirische Realität:

- Peterson (2000): Metaanalytisch ermittelte durchschnittliche Ladung bei Fragebögen: .32
- French (1951; vgl. Carroll, 1993): Durchschnittliche Kommunalität bei Leistungstests: .56
- NEO-FFI (Borkenau & Ostendorff, 1993): Ladungsrange .30 bis .60

Eine interessante Fragestellung lautet nun:

Sind die Ergebnisse von Hu und Bentler (1999) invariant gegenüber verschiedenen Ladungshöhen?

Kritik an Cut-Off Werten

Simulationsstudie (Heene et al., 2011): Masking misfit in confirmatory factor analysis by increasing unique variances: A cautionary note on the usefulness of cutoff values of fit indices. Psychological Methods, 16(3), 319.

- Vorgehen: Spezifikation zweier Populationsmodelle (einfach vs. komplex) und zweier fehlspezifizierter Modelle analog zu Hu und Bentler (1999)

- Variation der Faktorladungen λ: Zufallsziehung aus Gleichverteilungen:

  hoch: $\lambda \in [.70, .90]$

  mittel: $\lambda \in [.50, .70]$

  niedrig: $\lambda \in [.30, .50]$

- Stichprobengrößen: 150, 250, 500, 1000, 2500
- 1000 Replikationen je Simulationsbedingung

➢ Arithmetisches Mittel, Standardabweichung und β-Fehler der Indizes berechnet

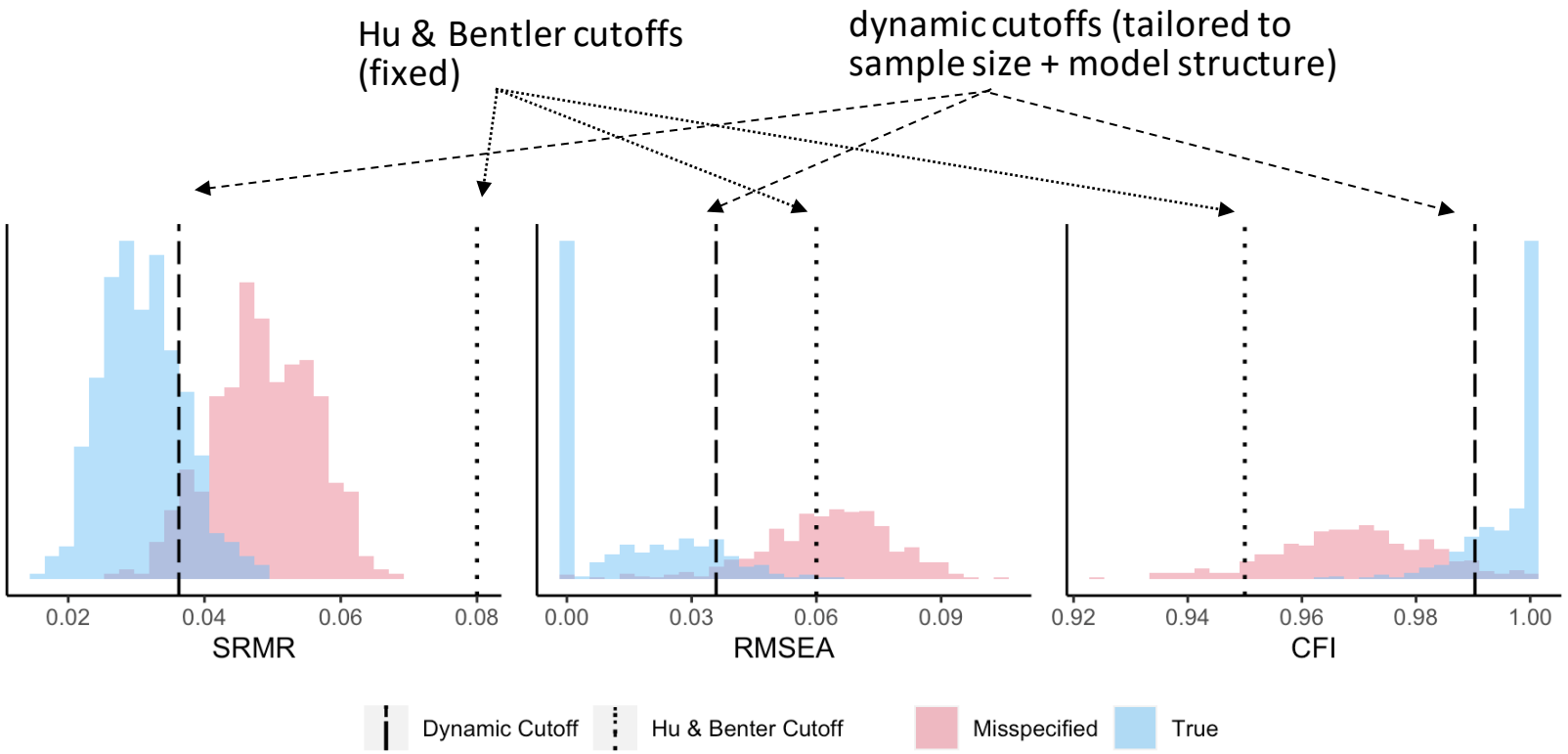
Kritik an Cut-Off Werten

Ergebnisse bei realistischen Ladungsmatrizen:

- CFI bei nicht-passenden Modellen auch von Faktorladungshöhe stark beeinflusst.
- RMSEA und SRMR lehnen bei Cutoff-Werten nach Hu und Bentler (1999) zu selten missspezifizierte Modelle ab:
  - β -Fehler bis zu 100%
- X^2-Test verliert an Teststärke, je niedriger Faktorladungen (bzw. Reliabilitäten) sind, ist jedoch vergleichsweise zuverlässigste Teststatistik

Exkurs: Dynamic Fit Index Cutoffs (McNeish & Wolf, 2021)

- „The new generation of fit index cutoffs are dynamic in that they change given the user's model statement, model type, and sample size."



- „This model would not have fit well by Hu & Bentler's traditional cutoffs […], but the fit is even poorer when compared to the DFI cutoffs tailored to the user's model."

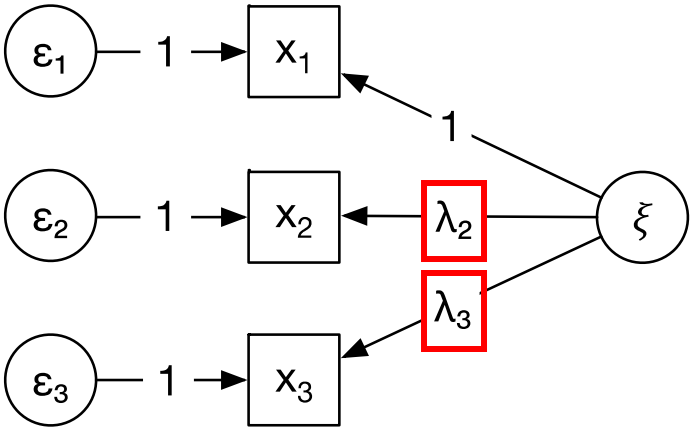
https://cran.r-project.org/web/packages/dynamic/vignettes/CFA.html

Modellvergleiche

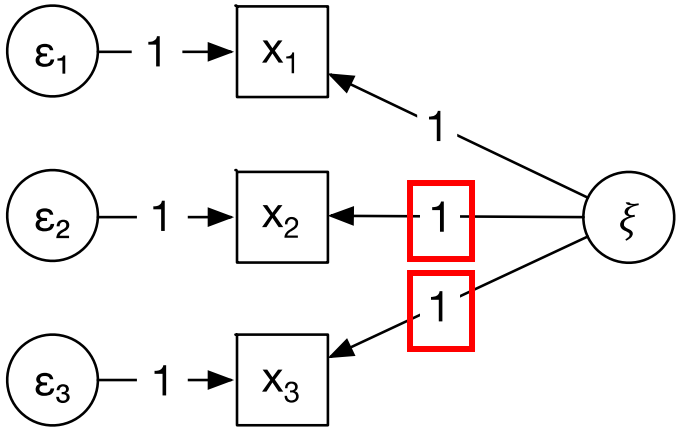
Geschachtelte Modelle

- Ein einfacheres Modell ist unter einem komplexeren Modell geschachtelt, wenn man durch Parameterfixierungen das komplexe zu dem einfachen Modell transformieren kann

Komplex:
- 6 Modellparameter
- *df* = 0



Einfach(er):
- 4 Modellparameter
- *df* = 2



Schachtelung prüfen: Weitere Regeln

- Beide zu vergleichenden Modelle müssen auf der selben Kovarianzmatrix basieren. D.h., beide müssen die selben manifesten Variablen enthalten *und* auf dem selben Datensatz beruhen.
  - D.h., auch manifeste Variablen, die nach der Fixierung eines Pfades auf 0 „frei flottierend“ im graphischen Modell sind (ohne Verbindungen zum Rest des Modells), müssen drin bleiben. Inhaltlich bildet das ja eine testbare Hypothese ab: es wird explizit angenommen, dass die frei flottierende Variable keine signifikanten Zusammenhänge zu allen anderen Variablen im Modell hat.
- Wenn zwei Modelle die selbe Anzahl von Freiheitsgraden haben, können sie nicht geschachtelt sein - das geht nur, wenn ein Modell komplexer ist als das andere (d.h., mehr Modellparameter hat; d.h., weniger Freiheitsgrade hat).
- Um vom komplexen Modell zum (geschachteltem) einfachen Modell zu kommen, dürfen nur Parameter fixiert werden (typischerweise auf 0 oder 1). Es ist nicht erlaubt, Parameter freizugeben.

Geschachtelte Modelle gegeneinander testen

- Geschachtelte Modelle können per χ^2-Differenzentest gegeneinander getestet werden
- Teststatistik: Differenz der χ^2-Werte beider Modelle

  $\Delta\chi^2 = \chi^2_{einfach} - \chi^2_{komplex}$
- Freiheitsgrade des Modellvergleichs:

  $\Delta df = df_{einfach} - df_{komplex}$
- Ein einfacheres Modell hat immer einen schlechteren Modellfit (Grenzfall: gleich gut) als ein komplexeres Modell. Die Frage ist: Ist es nur unwesentlich schlechter?
  - Ein *signifikanter* Modellvergleich zeigt an, dass das einfachere Modell signifikant schlechter ist als das komplexe → beim komplexen Modell bleiben.
  - Wenn das einfachere Modell *nicht signifikant* schlechter ist als das komplexe → das einfache Modell beibehalten (Occams Razor)

Geschachtelte Modelle

```
HS.model <- '
         visual   =~ 1*x1 + x2 + x3
         textual  =~ 1*x4 + x5 + x6
         speed    =~ 1*x7 + x8 + x9
'

HS.model.fixed <- '
         visual   =~ 1*x1 + 1*x2 + 1*x3
         textual  =~ 1*x4 + 1*x5 + 1*x6
         speed    =~ 1*x7 + 1*x8 + 1*x9
'

# Modellvergleich per anova()-Funktion
anova(fit, fit.fixed)

Chi Square Difference Test

          Df    AIC    Chisq Chisq diff Df diff Pr(>Chisq)
fit       24 7517.5   85.305
fit.fixed 30 7527.6  107.411     22.105       6   0.001159 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Interpretation des Beispiels: Man sollte beim komplexeren bleiben; das vereinfachte Modell ist *zu* einfach (weil signifikant schlechter).

Nicht-geschachtelte Modelle: AIC

- Nicht-geschachtelte Modelle beziehen sich wie geschachtelte auf die gleichen Daten
- Nicht-geschachtelte Modelle können *nicht* per χ^2-Differenzentest verglichen werden
- Alternative für nicht-geschachtelte Modelle (ohne ins Detail zu gehen): *AIC* (Akaike Information Criterion)
- Je kleiner AIC, desto besser passt das Modell zu den Daten.
  Achtung: Im Gegensatz zum χ^2-Wert kann der AIC des komplexeren Modells sowohl größer als auch kleiner als der AIC des einfacheren Modells sein!
- Absolute Höhe bei AIC irrelevant; entscheidend ist nur die Differenz von AIC beider Modelle, also ΔAIC
- Faustregel: ein $\Delta AIC < 2$ bedeutet, das beide Modelle im Wesentlichen gleich gut sind; $\Delta AIC > 6$ bedeutet klare Bevorzugung des Modells mit dem kleineren AIC. Dazwischen ist es „inconclusive“, es werden mehr Daten benötigt um eine Entscheidung treffen zu können.
- AIC kann auch bei geschachtelten Modellen angewendet werden; bietet jedoch keinen Signifikanztest

Geschachteltes Modell - AIC


```
HS.model <- '
         visual   =~ x1 + x2 + x3
         textual  =~ x4 + x5 + x6
         speed    =~ x7 + x8 + x9
'

HS.model.fixed <- '
         visual   =~ 1*x1 + 1*x2 + 1*x3
         textual  =~ 1*x4 + 1*x5 + 1*x6
         speed    =~ 1*x7 + 1*x8 + 1*x9
'

# Modellvergleich per anova()-Funktion
anova(fit, fit.fixed)

Chi Square Difference Test

          Df    AIC    Chisq Chisq diff Df diff Pr(>Chisq)
fit       24 7517.5   85.305
fit.fixed 30 7527.6  107.411     22.105       6   0.001159 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

ΔAIC = 10.1: Das komplexere Modell „fit“ ist zu bevorzugen

Nicht-geschachteltes Modell - AIC


```
HS.model <- '
         visual   =~ 1*x1 + x2
         textual  =~ 1*x4 + x6
         speed    =~ 1*x7 + x8 + x9'

HS.model2 <- '
         visual   =~ 1*x2 + 1*x3
         textual  =~ 1*x4 + x5
         speed    =~ 1*x7 + x8 + x9'

anova(fit, fit2)
AIC(fit)
AIC(fit2)
```

Bei nicht-geschachtelten Modellen (siehe lavaan-Warning): χ^2 Test *nicht* interpretieren!

```
> anova(fit, fit2)
Chi Square Difference Test

     Df    AIC    BIC  Chisq Chisq diff Df diff Pr(>Chisq)
fit  11 5937.6 6000.6 50.728
fit2 12 6029.3 6088.6 52.597     1.8685       1     0.1716
Warnmeldung:
In lavTestLRT(object = new("lavaan", version = "0.6.3", call = lavaan::lavaan(model = HS.model,
  lavaan WARNING: some models are based on a different set of observed variables
>
> AIC(fit)
[1] 5937.589
> AIC(fit2)
[1] 6029.264
```

Kommentar zu Modellvergleichen

- Sowohl bei Modellvergleichen mit dem χ^2-Differenzentest als auch dem AIC hat man keine Garantie, dass das „bessere“ Modell näher dran ist am tatsächlichen kausalen Modell in der Population.
- Dies gilt vor allem, wenn das bessere Modell beim exakten Modelltest und den Fit Indices immer noch schlecht abschneidet.
- Sowohl χ^2-Differenzentest als auch das AIC sollten eher als prädiktive Kriterien angesehen werden. Sie können helfen, das Modell zu finden welches die manifesten Variablen am besten vorhersagt.

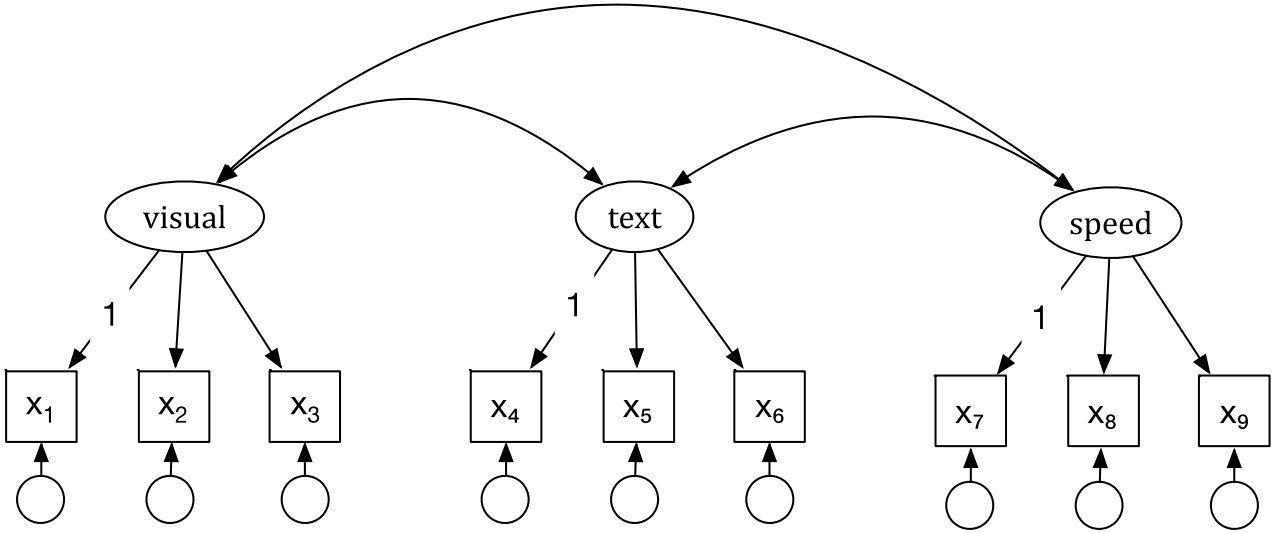
Ein Beispiel, komplett durchexerziert

Beispiel CFA: HolzingerSwineford1939

- Bekannter Datensatz, basierend auf Holzinger & Swineford (1939)
- 9 beobachtete Indikatoren messen 3 latente Faktoren:
  - Faktor „visual“ durch x1 (Visual perception), x2 (Cubes) und x3 (Lozenges)
  - Faktor „text“ durch x4 (Paragraph comprehension), x5 (Sentence completion) und x6 (Word meaning)
  - Faktor „speed“ durch x7 (Speeded addition), x8 (Speeded counting of dots) und x9 (Speeded discrimination straight and curved capitals)
- N=301
- Annahme: 3 korrelierte Faktoren

Beispiel CFA: HolzingerSwineford1939


```
HS.model <- '
        visual  =~ x1 + x2 + x3
        textual =~ x4 + x5 + x6
        speed   =~ x7 + x8 + x9
'

fit <- cfa(model = HS.model,
        data = HolzingerSwineford1939)

summary(fit, standardized = TRUE, fit.measures = TRUE)
```



Gesamt-Fit des Modells

lavaan (0.6-1) converged normally after 35 iterations

Number of observations	301
Estimator	ML
Model Fit Test Statistic	85.306
Degrees of freedom	24
P-value (Chi-square)	0.000

User model versus baseline model:

Comparative Fit Index (CFI)	0.931

Root Mean Square Error of Approximation:

RMSEA	0.092
90 Percent Confidence Interval	0.071 0.114
P-value RMSEA <= 0.05	0.001

Standardized Root Mean Square Residual:

SRMR	0.065

- Aufgrund der Fit-Indizes würden wir das Modell im Ganzen ablehnen.
- Generell gilt: wird das Modell im Ganzen abgelehnt, ist es auch sinnfrei die Schätzungen der Parameter zu interpretieren.
- Zur Veranschaulichung wollen wir im Folgenden die Schätzungen der Parameter trotzdem interpretieren.

Interpretation der Ladungen

Latent Variables:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(>|z|)	Std.lv	Std.all
visual =~						
x1	1.000			0.900	0.772	
x2	0.554	0.100	5.554	0.000	0.498	0.424
x3	0.729	0.109	6.685	0.000	0.656	0.581
textual =~						
x4	1.000			0.990	0.852	
x5	1.113	0.065	17.014	0.000	1.102	0.855
x6	0.926	0.055	16.703	0.000	0.917	0.838
speed =~						
x7	1.000			0.619	0.570	
x8	1.180	0.165	7.152	0.000	0.731	0.723
x9	1.082	0.151	7.155	0.000	0.670	0.665

- Pfadkoeffizienten zwischen manifesten Indikatoren und latenten Variablen.
- Bei einem Unterschied von 1 Einheit in der latenten Variablen wird ein Unterschied von 0.554 Einheiten in der manifesten Variablen x2 erwartet.
- Da sie unstandardisiert sind, können wir sie in ihrer relativen Höhe zueinander nicht interpretieren.
- Keine Aussage darüber, ob es ein starker oder schwacher Zusammenhang ist.

Interpretation der Ladungen

Latent Variables:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(>|z|)	Std.lv	Std.all
visual =~						
x1	1.000				0.900	0.772
x2	0.554	0.100	5.554	0.000	0.498	0.424
x3	0.729	0.109	6.685	0.000	0.656	0.581
textual =~						
x4	1.000				0.990	0.852
x5	1.113	0.065	17.014	0.000	1.102	0.855
x6	0.926	0.055	16.703	0.000	0.917	0.838
speed =~						
x7	1.000				0.619	0.570
x8	1.180	0.165	7.152	0.000	0.731	0.723
x9	1.082	0.151	7.155	0.000	0.670	0.665

- **Std. all** steht für den Fall, dass die Varianzen **aller** manifesten und aller latenten Variablen (mit Ausnahme der Fehler) standardisiert und damit auf 1 festgelegt wurden.
- Jetzt können wir die jeweiligen **standardisierten** Ladungen in ihrer relativen Ausprägung zueinander interpretieren.
- Auch eine Aussage darüber, wie stark der Zusammenhang zwischen latenter und manifester Variable ist, ist nun möglich.

Interpretation der Kovarianzen

Covariances:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(>|z|)	Std.lv	Std.all
visual ~~						
textual	0.408	0.074	5.552	0.000	0.459	0.459
speed	0.262	0.056	4.660	0.000	0.471	0.471
textual ~~						
speed	0.173	0.049	3.518	0.000	0.283	0.283

Wie oben können wir die Ausprägungen der Kovarianzen nicht wirklich gut interpretieren

- In der standardisierten Lösung std.all entsprechen die Kovarianzen den **Korrelationen.**
- Diese erlauben uns nun Aussagen über die Stärke des Zusammenhangs.

Interpretation der Varianzen

Variances:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(>|z|)	Std.lv	Std.all
.x1	0.549	0.114	4.833	0.000	0.549	0.404
.x2	1.134	0.102	11.146	0.000	1.134	0.821
.x3	0.844	0.091	9.317	0.000	0.844	0.662
.x4	0.371	0.048	7.779	0.000	0.371	0.275
.x5	0.446	0.058	7.642	0.000	0.446	0.269
.x6	0.356	0.043	8.277	0.000	0.356	0.298
.x7	0.799	0.081	9.823	0.000	0.799	0.676
.x8	0.488	0.074	6.573	0.000	0.488	0.477
.x9	0.566	0.071	8.003	0.000	0.566	0.558
visual	0.809	0.145	5.564	0.000	1.000	1.000
textual	0.979	0.112	8.737	0.000	1.000	1.000
speed	0.384	0.086	4.451	0.000	1.000	1.000

- Erinnerung: von allen Fehlern und allen exogenen latenten Variablen müssen Varianzen geschätzt werden (sofern sie nicht fixiert sind).
- Für alle **endogenen** Variablen in der Tabelle entspricht der Estimate der **Fehlervarianz** dieser Variablen.
- Für alle **exogenen** Variablen in der Tabelle entspricht der Estimate der **Varianz**.
- In der absoluten Ausprägung hat die Varianz wie oben keine wirkliche Interpretation. Man müsste bspw. schon die Gesamtvarianz einer endogenen Variablen wissen, um abzuschätzen, ob die Fehlervarianz vergleichsweise hoch ist.

Interpretation der Varianzen

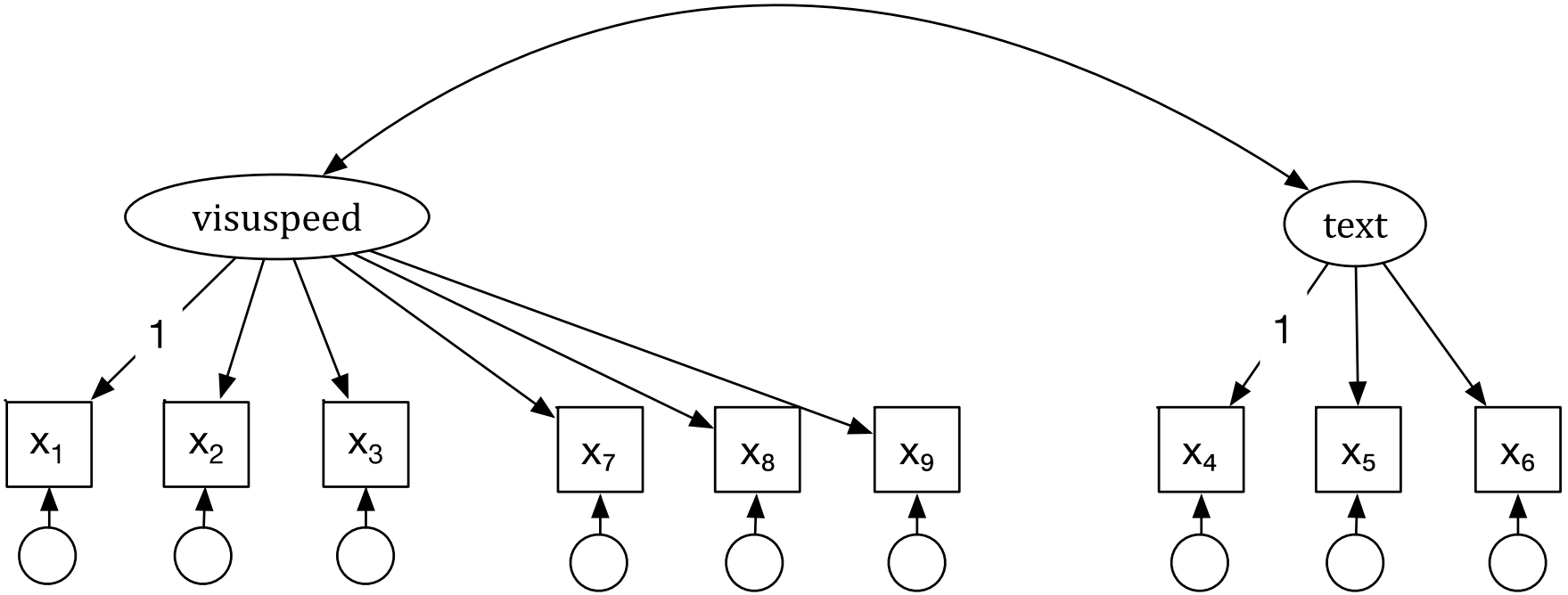
Variances:

	Estimate	Std.Err	z-value	P(>|z|)	Std.lv	Std.all
.x1	0.549	0.114	4.833	0.000	0.549	0.404
.x2	1.134	0.102	11.146	0.000	1.134	0.821
.x3	0.844	0.091	9.317	0.000	0.844	0.662
.x4	0.371	0.048	7.779	0.000	0.371	0.275
.x5	0.446	0.058	7.642	0.000	0.446	0.269
.x6	0.356	0.043	8.277	0.000	0.356	0.298
.x7	0.799	0.081	9.823	0.000	0.799	0.676
.x8	0.488	0.074	6.573	0.000	0.488	0.477
.x9	0.566	0.071	8.003	0.000	0.566	0.558
visual	0.809	0.145	5.564	0.000	1.000	1.000
textual	0.979	0.112	8.737	0.000	1.000	1.000
speed	0.384	0.086	4.451	0.000	1.000	1.000

- Die std.all Lösung erhält man, wenn die Varianzen aller Variablen (mit Ausnahme der Fehler) auf 1 gesetzt werden.
- Wichtig: das entspricht nicht einer Fixierung, sondern einer Standardisierung.
- Wenn wir jetzt die Fehlervarianz für den Fall kennen, dass die Gesamtvarianz 1 ist, können wir deren Höhe nun beurteilen.
- Bsp. *x1*:
  - Fehlervarianz = 0.404, wenn die Gesamtvarianz 1 ist.
  - "Systematische Varianz", also alles was z.B. durch latente Variablen (hier *visual*) erklärt wird = Gesamtvarianz – Fehlervarianz = 1 – 0.404 = 0.596
  - Ca. 60% der Gesamtvarianz von *x1* wird durch die latente Variable *visual* erklärt.

Alternatives 2-Faktor-Modell


```
HS.model2 <- '
        visuspeed =~ x1 + x2 + x3 + x7 + x8 + x9
        textual =~ x4 + x5 + x6
'
```



Alternatives 2-Faktor-Modell
Gesamt-Fit des Modells

lavaan (0.6-1) converged normally after 30 iterations

Number of observations	301
Estimator	ML
Model Fit Test Statistic	151.470
Degrees of freedom	26
P-value (Chi-square)	0.000

User model versus baseline model:

Comparative Fit Index (CFI)	0.858

Root Mean Square Error of Approximation:

RMSEA	0.127
90 Percent Confidence Interval	0.108 0.147
P-value RMSEA <= 0.05	0.000

Standardized Root Mean Square Residual:

SRMR	0.088

Aufgrund der Fit-Indizes würden wir auch dieses Modell ablehnen.

Modellvergleich mit AIC (weil nicht geschachtelt)


```
> lavTestLRT(fit, fit2, model.names=c(fit = "3-Faktor", fit2 = "2-Faktor"))
Chi Square Difference Test

          Df    AIC    BIC   Chisq Chisq diff Df diff Pr(>Chisq)
3-Faktor 24 7517.5 7595.3  85.305
2-Faktor 26 7579.7 7650.1 151.470    66.165       2   4.29e-15 ***
```

- Der Vergleich des AIC legt nahe, dass das 3-Faktor Modell besser als das 2-Faktor Modell zu den Daten passt.
- Aber wir haben ja schon beim Modellfit gesehen, dass das Modell eh unsere Daten nicht ausreichend gut beschreibt.

Die χ^2-Differenz wird nicht interpretiert, da die Modelle nicht geschachtelt sind

Zusammenfassung

- Fit-Indizes quantifizieren, wie nahe die (gefittete) modell-implizierte Kovarianzmatrix an der empirischen Kovarianzmatrix ist (d.h.: Wie gut kann das Modell die Daten abbilden?)
- Unterscheide den exakten Modellfit (basierend auf dem χ^2-Test), relative und absolute Modellfits
- Die am häufigsten herangezogenen Cutoff-Werte (d.h., ab wann ist ein Fitindex gut / schlecht?) sind die von Hu & Bentler (1999).
  - RMSEA < 0.06 bei $N > 250$; < 0.08 bei $N \leq 250$; SRMR < 0.11; CFI > 0.95
- Aber: Kritik an diesen starren Cutoffs, passen oft nicht zu den tatsächlichen Modellen
- Modellvergleiche geben an, welches von zwei Modellen *relativ gesehen* besser zu den Daten passt
  - Geschachtelte Modelle: χ^2-Test oder AIC
  - Nicht-geschachtelte Modelle: AIC