Psychologische Testtheorie

Sitzung 8

Faktorenanalyse I

Wahr-oder-Falsch Aussagen zur letzten Sitzung I

1. Angenommen, für einen Prokrastinations-Fragebogen konnte die Passung des τ - kongenerischen und essentiell τ - äquivalentenen Modells bestätigt werden. Sie müssen nun das essentiell τ -äquivalente Modell wählen, um die Reliabilität des Tests zu untersuchen.

2. Ihnen liegt folgender R-Output zur Modelltest und den Parameterschätzungen für eine Neurotizismus-Skala vor:

```
Model Test User Model:

  Test statistic                              4738.033
  Degrees of freedom                                76
  P-value (Chi-square)                           0.005


 Intercepts:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  .item1              0.000                               0.000    0.000
  .item2              0.000                               0.000    0.000
  .item3              0.000                               0.000    0.000
  .item4              0.000                               0.000    0.000
  .item5              0.000                               0.000    0.000
  .item6              0.000                               0.000    0.000
   NEURO              1.650    0.027  61.6729    0.000    1.650    1.650

 Variances:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
    NEURO             0.127    0.006   20.666    0.000    0.127    0.127
   .item1             0.390    0.016   24.421    0.000    0.390    0.281
   .item2             0.491    0.020   24.935    0.000    0.491    0.329
   .item3             0.460    0.019   24.801    0.000    0.460    0.315
   .item3             0.671    0.026   25.467    0.000    0.671    0.402
   .item4             0.527    0.021   25.069    0.000    0.527    0.345
   .item5             0.492    0.020   24.936    0.000    0.492    0.330
   .item6             0.427    0.017   24.637    0.000    0.427    0.299
```

a) Hier wurde ein paralleles Modell getestet.

b) Die latente Variable Neurotizismus weist einen Erwartungswert von 1.65 auf.

c) Sie können davon ausgehen, dass die Folgerungen aus dem getesteten testtheoretischen Modell erfüllt sind.

Überblick

Sitzung	Datum	Thema	Themenblock
1	13.10.25	Einführung	Begriffe, Modellierung von Antwortverhalten durch Zufallsvariablen & mathematische Grundlagen der Testtheorie
2	20.10.25	Wahrscheinlichkeitstheoret. Grundlagen	
3	27.10.25	Testtheoretische Modelle I	Testtheoretische Modelle
4	03.11.25	Testtheoretische Modelle II	
5	10.11.25	Testtheoretische Modelle III	
6	17.11.25	Skalierung I	Gütekriterien psychologischer Tests
7	24.11.25	Skalierung II	
8	01.12.25	Faktorenanalyse I	

➢ In der heutigen Vorlesung beschäftigen wir uns genauer mit der Schätzung ein- und mehrdimensionaler τ-kongenerischer Modelle im Rahmen der Faktorenanalyse.

1. Einleitung

Einleitung

- Die **Faktorenanalyse** ist ein statistisches Verfahren zur Schätzung der Parameter ein- oder mehrdimensionaler Testmodelle
- Es gibt zwei Arten von Faktorenanalysen:
  - Konfirmatorische Faktorenanalysen (**C**onfirmatory **F**actor **A**nalysis: **CFA**)

    Eine **CFA** schätzt die Parameter eines (nahezu) **beliebigen vorgegebenen Testmodells** und prüft dessen Annahmen (z.B. dreidimensionales paralleles Testmodell) ➛ siehe Parameterschätzung und Modelltest aus Vorlesung #07
  - Exploratorische Faktorenanalysen (**E**xploratory **F**actor **A**nalysis: **EFA**)

    Eine **EFA** schätzt die Parameter eines ein- oder mehrdimensionalen **τ-kongenerischen** Modells

Entscheidung zur Art der Faktorenanalyse I

Wann setze ich welche Art der Faktorenanalyse ein?

1) Man hat eine **Theorie** welches Testmodell angemessen ist → **CFA**

- Diese Theorie umfasst folgende Informationen (= theoriegeleitete Annahmen):
  - Anzahl der latenten Variablen
  - Zuordnung der Items zu den latenten Variablen
  - Evtl. **Restriktionen** des Testmodells (im Vergleich zum mehrdimensionalen τ- kongenerischen Modell)
  - Evtl. **Erweiterungen** des Testmodells (im Vergleich zum mehrdimensionalen τ- kongenerischen Modell)

Wann setze ich welche Art der Faktorenanalyse ein?

2) Man hat **keine Theorie** oder die CFA hat das **Modell abgelehnt**, ohne dass klare Hinweise zur Anpassung des Modells abgeleitet werden können → **EFA**

- Anzahl der latenten Variablen theoretisch vorgegeben oder empirisch bestimmt
- Keine theoriegeleiteten Annahmen über die Zuordnung der Items zu den latenten Variablen – diese geschieht rein empirisch bei der Schätzung
- Feste Vorgabe des ein- oder mehrdimensionalen τ-kongenerischen Testmodells ohne Möglichkeit von Anpassungen (d.h., keine Restriktionen/Erweiterungen)
  - Achtung: Das mehrdimensionale τ-kongenerische Modell ist nicht identifiziert, weshalb Steigungsparameter und Korrelationen zwischen den latenten Variablen nur nach einer sog. Rotation geschätzt werden können (siehe Vorlesung #09)
- Modellevaluation möglich, steht aber nicht im Vordergrund

Schritte einer Faktorenanalyse

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. **Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen**

➛ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. **Spezifikation des Testmodells**

➛ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell

3. **Schätzung des Testmodells**

➛ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

➛ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. **Evaluation der Modellpassung**

➛ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. **Interpretation der Modellparameter**

➛ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. **Weiterführende Schritte**

z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #10 bis #12), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #13 und #14)

2. Spezifikation eines Testmodells

Schritte einer Faktorenanalyse

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. **Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen**

➛ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. **Spezifikation des Testmodells**

➛ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell

3. **Schätzung des Testmodells**

➛ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

➛ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. **Evaluation der Modellpassung**

➛ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. **Interpretation der Modellparameter**

➛ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. **Weiterführende Schritte**

z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #9 bis #11), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #12 und #13)

Kurze Wiederholung: Mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell

- Im **q-dimensionalen τ-kongenerischen Modell** werden folgende beiden Annahmen getroffen:

$$\tau_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q \text{ und somit}$$

$$X_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

$$COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ für alle Itempaare } i, j$$

Kurze Wiederholung: Mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell

$$\tau_i = \boldsymbol{\sigma_i} + \boldsymbol{\beta_{i1}} \cdot \theta_1 + \boldsymbol{\beta_{i2}} \cdot \theta_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta_{iq}} \cdot \theta_q \text{ und somit}$$

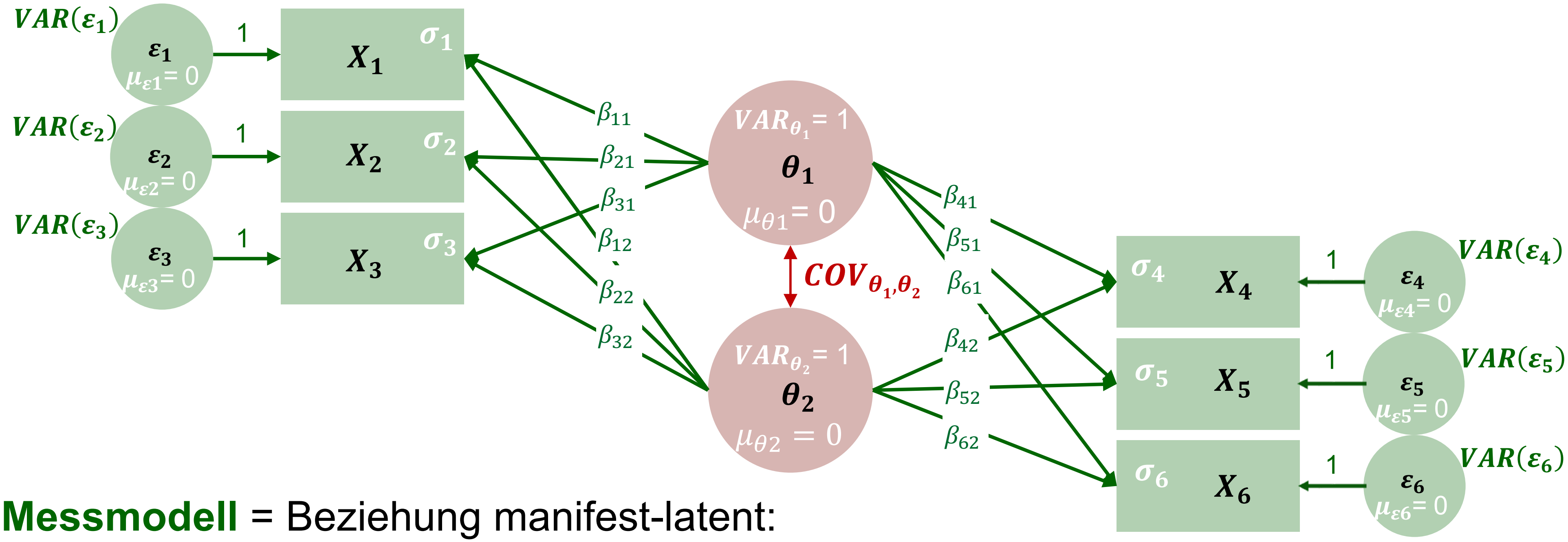
$$X_i = \boldsymbol{\sigma_i} + \boldsymbol{\beta_{i1}} \cdot \theta_1 + \boldsymbol{\beta_{i2}} \cdot \theta_2 + \cdots + \boldsymbol{\beta_{iq}} \cdot \theta_q + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Die Konstanten $\boldsymbol{\sigma_i}$ werden **Itemparameter** genannt
  - Es gibt für jeden Test genau $\boldsymbol{k}$ Itemparameter
- Die Konstanten $\boldsymbol{\beta_{il}}$ werden **Steigungsparameter** genannt
  - Es gibt für jedes Item genau $\boldsymbol{q}$ Steigungsparameter

Feststehendes Testmodell der EFA

Ein- oder mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell ohne Spezifikationen:

(Bsp. zweidimensionales τ-kongenerisches Modell)



Messmodell = Beziehung manifest-latent:

$$X_1 = \sigma_1 + \beta_{11} \cdot \theta_1 + \beta_{12} \cdot \theta_2 + \varepsilon_1$$
$$X_2 = \sigma_2 + \beta_{21} \cdot \theta_1 + \beta_{22} \cdot \theta_2 + \varepsilon_2$$
$$X_3 = \sigma_3 + \beta_{31} \cdot \theta_1 + \beta_{32} \cdot \theta_2 + \varepsilon_3$$

$$X_4 = \sigma_4 + \beta_{41} \cdot \theta_1 + \beta_{42} \cdot \theta_2 + \varepsilon_4$$
$$X_5 = \sigma_5 + \beta_{51} \cdot \theta_1 + \beta_{52} \cdot \theta_2 + \varepsilon_5$$
$$X_6 = \sigma_6 + \beta_{61} \cdot \theta_1 + \beta_{62} \cdot \theta_2 + \varepsilon_6$$

Strukturmodell = Beziehung latent-latent: COV_{θ_1,θ_2}

Restriktion von Testmodellen I

$$\tau_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q \text{ und somit}$$

$$X_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q + \varepsilon_i \text{ für alle Items } i$$

- Wie wird das **mehrdimensionale $\boldsymbol{\tau}$-kongenerische Modell** **restriktiver**?
  - Durch die Festlegung („Fixierung“) bestimmter Parameter im Modell
  - Beispiel:
    - Festlegung der Steigungsparameter auf $\beta_{i1} = \beta_{i2} = \beta_{iq} = 1$
      d.h., $X_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 + \cdots + 1 \cdot \theta_q + \varepsilon_i$ für alle Items i
    - Zusätzliche Annahme, dass alle Items i gleiche Fehlervarianzen $VAR(\varepsilon_1) = VAR(\varepsilon_2) = VAR(\varepsilon_3) = a$ aufweisen
    - Annahme von Einfachstruktur (siehe Folie 41)

    → **Mehrdimensionales essentiell paralleles Modell mit Einfachstruktur**!

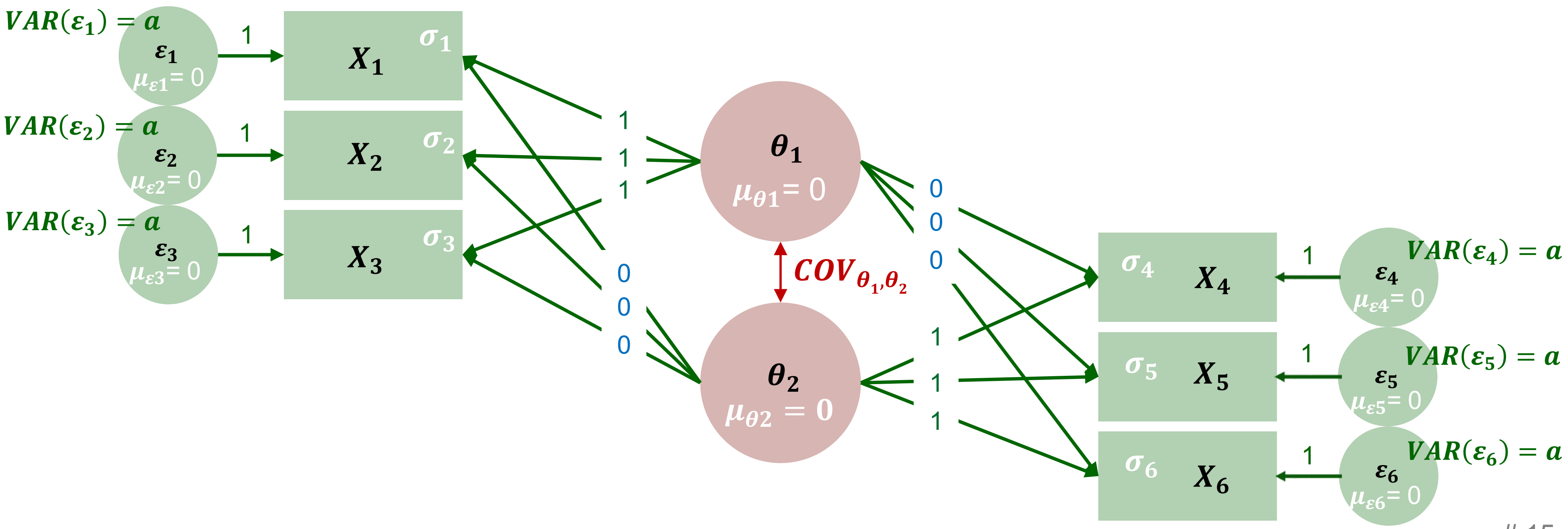
- Beispiel für ein **restriktiveres** mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell: **ein mehrdimensionales essentiell paralleles Modell mit Einfachstruktur**

$$\tau_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta_1 + \mathbf{0} \cdot \theta_2 \text{ \underline{und} } \tau_j = \sigma_j + \mathbf{0} \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2$$

$$X_i = \sigma_i + \mathbf{1} \cdot \theta_1 + \mathbf{0} \cdot \theta_2 + \varepsilon_i \textbf{ für alle Items } \boldsymbol{i}$$

$$X_j = \sigma_j + \mathbf{0} \cdot \theta_1 + \mathbf{1} \cdot \theta_2 + \varepsilon_j \textbf{ für alle Items } \boldsymbol{j}$$

$$VAR(\varepsilon_1) = VAR(\varepsilon_2) = \cdots = VAR(\varepsilon_k) = a$$



Erweiterung von Testmodellen I

$\tau_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q$ und somit

$X_i = \sigma_i + \beta_{i1} \cdot \theta_1 + \beta_{i2} \cdot \theta_2 + \cdots + \beta_{iq} \cdot \theta_q + \varepsilon_i$ für alle Items i

- Wie wird das **mehrdimensionale $\boldsymbol{\tau}$-kongenerische Modell** **weniger restriktiv**?
  - Zuvor fixierte Parameter im Modell werden frei geschätzt
  - Beispiel:
    - Festlegung, dass ein konkretes Itempaar kovariieren darf, z.B. $COV(\varepsilon_4, \varepsilon_5) = \lambda$ statt $COV(\varepsilon_4, \varepsilon_5) = 0$

    → **mehrdimensionales essentiell paralleles Modell mit Einfachstruktur und korreliertem Messfehler**!

- Beispiel für ein **weniger restriktives** mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell: **ein mehrdimensionales essentiell paralleles Modell mit Einfachstruktur und korreliertem Messfehler**

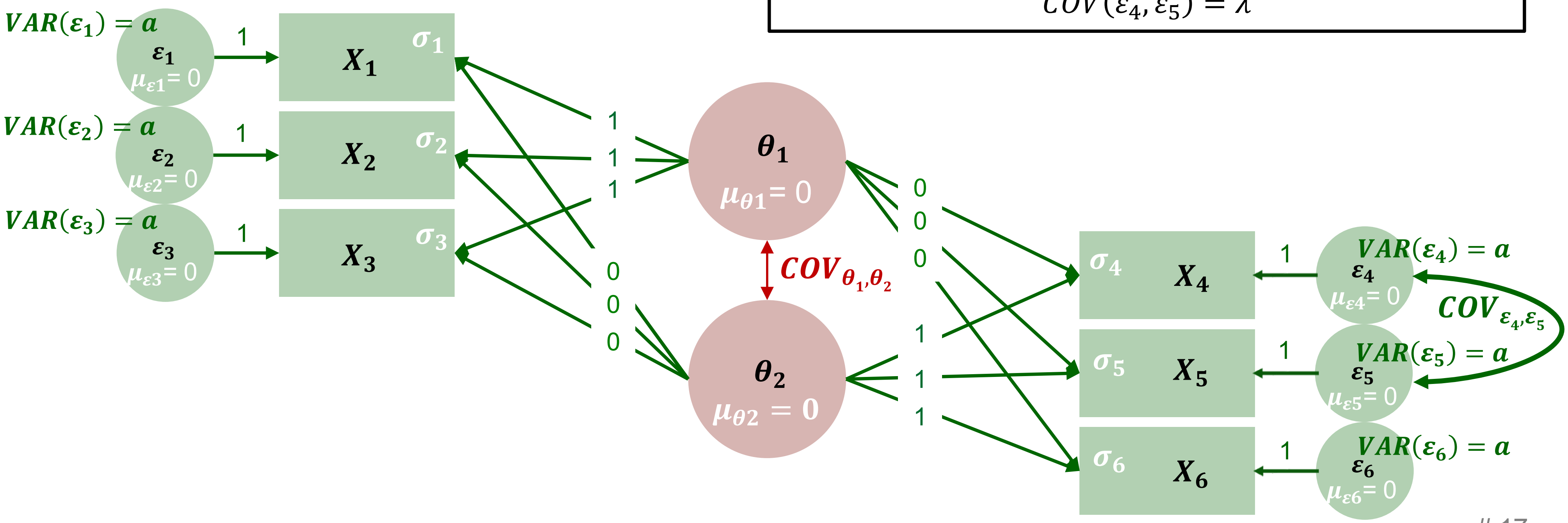
$$\tau_i = \sigma_i + 1 \cdot \theta_1 + \mathbf{0} \cdot \theta_2 \text{ \underline{und} } \tau_j = \sigma_j + \mathbf{0} \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2$$

$$X_i = \sigma_i + \mathbf{1} \cdot \theta_1 + \mathbf{0} \cdot \theta_2 + \varepsilon_i \textbf{ für alle Items } \boldsymbol{i}$$

$$X_j = \sigma_j + \mathbf{0} \cdot \theta_1 + \mathbf{1} \cdot \theta_2 + \varepsilon_j \textbf{ für alle Items } \boldsymbol{j}$$

$$VAR(\varepsilon_1) = VAR(\varepsilon_2) = \cdots = VAR(\varepsilon_k) = a$$

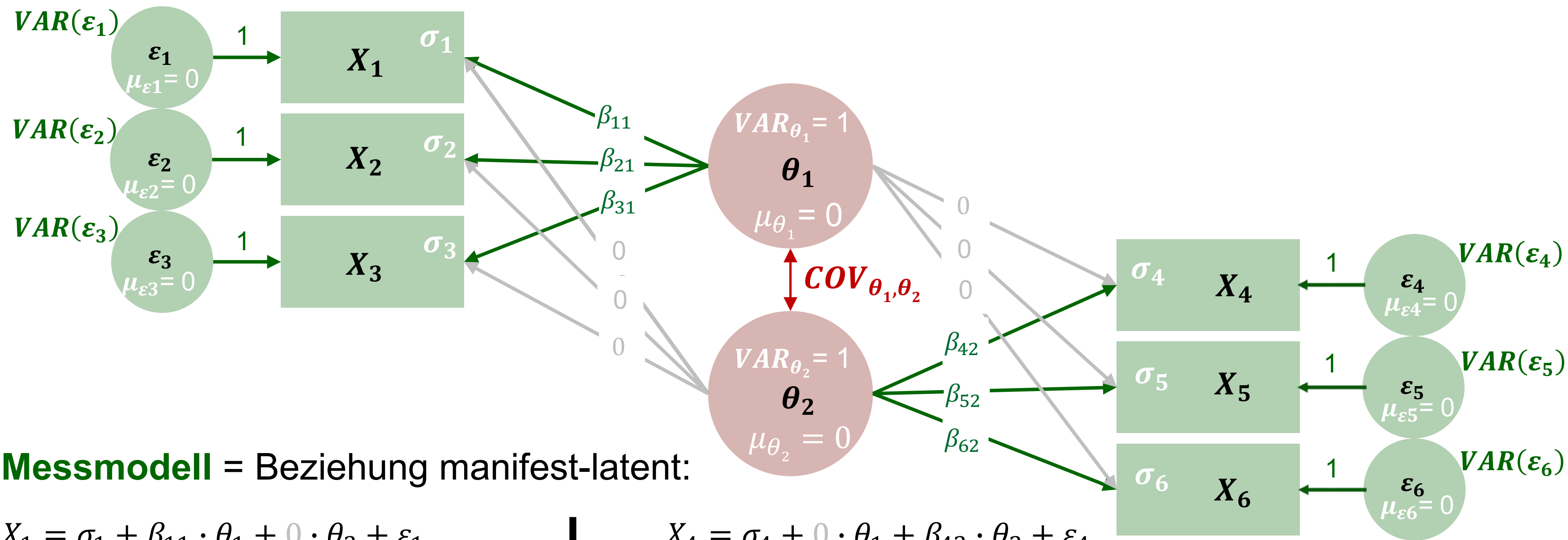
$$COV(\varepsilon_4, \varepsilon_5) = \lambda$$



Spezifikation des Testmodells in der CFA I

Im Gegensatz zur EFA, kann das Testmodell der CFA (nahezu) beliebig spezifiziert werden, indem Restriktionen oder Erweiterungen des ein- oder mehrdimensionalen τ-kongenerischen Modells vorgenommen werden!

z.B. zweidimensionales restringiertes τ-kongenerisches Modell mit Einfachstruktur



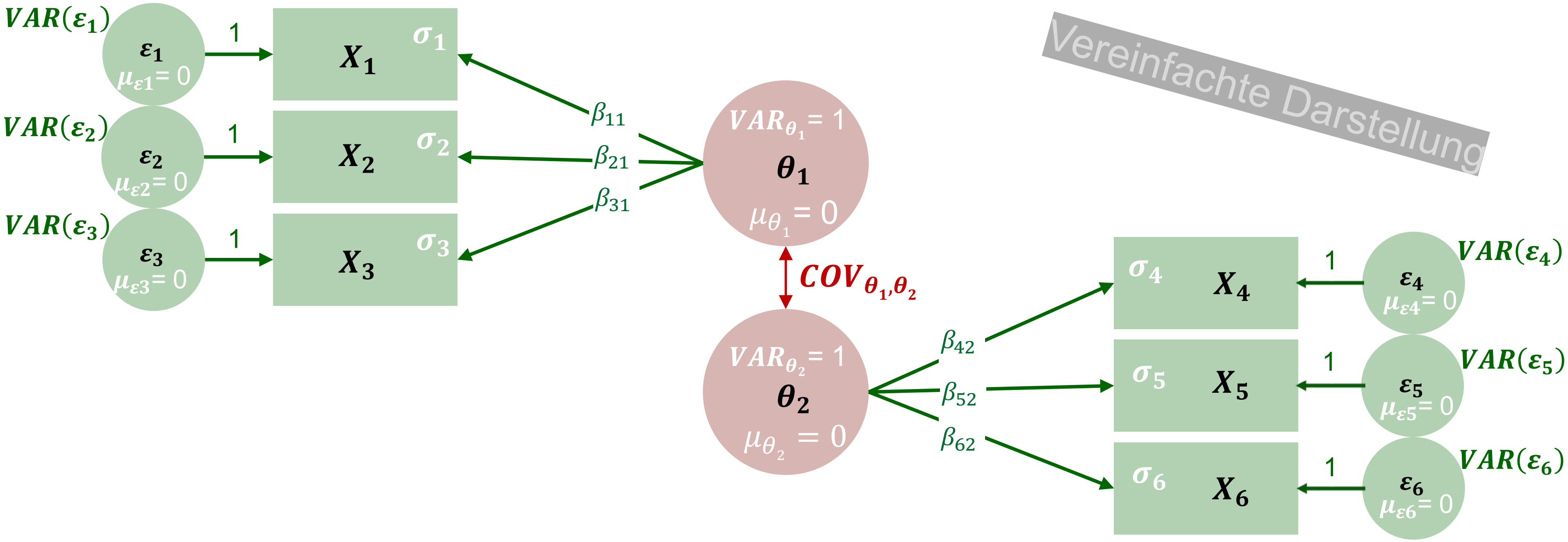
Messmodell = Beziehung manifest-latent:

$X_1 = \sigma_1 + \beta_{11} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_1$
$X_2 = \sigma_2 + \beta_{21} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_2$
$X_3 = \sigma_3 + \beta_{31} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_3$

$X_4 = \sigma_4 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{42} \cdot \theta_2 + \varepsilon_4$
$X_5 = \sigma_5 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{52} \cdot \theta_2 + \varepsilon_5$
$X_6 = \sigma_6 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{62} \cdot \theta_2 + \varepsilon_6$

Strukturmodell = Beziehung latent-latent: $\boldsymbol{COV_{\theta_1,\theta_2}}$

Zweidimensionales restringiertes τ-kongenerisches CFA Modell mit Einfachstruktur:



Messmodell = Beziehung manifest-latent:

$$X_1 = \sigma_1 + \beta_{11} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_1$$
$$X_2 = \sigma_2 + \beta_{21} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_2$$
$$X_3 = \sigma_3 + \beta_{31} \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \varepsilon_3$$

$$X_4 = \sigma_4 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{42} \cdot \theta_2 + \varepsilon_4$$
$$X_5 = \sigma_5 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{52} \cdot \theta_2 + \varepsilon_5$$
$$X_6 = \sigma_6 + 0 \cdot \theta_1 + \beta_{62} \cdot \theta_2 + \varepsilon_6$$

Strukturmodell = Beziehung latent-latent: $\boldsymbol{COV_{\theta_1,\theta_2}}$

Spezifikation eines Testmodells: Fazit

- **EFA:** Jeder EFA liegt das gleiche testtheoretische Modell zugrunde, nämlich das ein- bzw. mehrdimensionale τ-kongenerische Modell
- **CFA:** Im Rahmen einer CFA können auch andere restriktivere oder weniger restriktive Modelle getestet werden. Sie lassen sich als Modelle darstellen, in denen Parameter des EFA Modells auf bestimmte Werte fixiert (restriktivere Modelle) oder frei geschätzt (weniger restriktive Modelle) werden

3. Faktorenanalytische Schätzmethode

Schritte einer Faktorenanalyse

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen

➢ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. Spezifikation des Testmodells

➢ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell

3. Schätzung des Testmodells

➢ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

➢ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. Evaluation der Modellpassung

➢ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. Interpretation der Modellparameter

➢ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. Weiterführende Schritte

z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #9 bis #11), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #12 und #13)

Schätzverfahren

- Es gibt verschiedene Schätzmethoden für CFA und EFA:
  - **Maximum-Likelihood-Faktorenanalyse** (ML)
  - Weitere Methoden wie z.B. WLS, WLSM, ULS, WLSMV …
  - Es gibt außerdem ein Verfahren namens **Hauptkomponentenanalyse** (PCA oder PC), das streng genommen keine Faktorenanalyse ist, aber oft die selben Ergebnisse liefert und das in R ebenfalls als „Schätzmethode“ spezifiziert werden kann
- Wir werden uns hier auf die ML-Schätzmethode beschränken, aber auch diese nicht im Detail besprechen, sondern uns auf R Outputs fokussieren

Parameterschätzung I

Ausgangsbasis:

Empirische Kovarianzmatrix S (oder Korrelationsmatrix R)

$$\begin{matrix} cov\,(x_1, x_1) & & \\ cov\,(x_2, x_1) & cov\,(x_2, x_2) & \\ cov\,(x_3, x_1) & cov\,(x_3, x_2) & cov\,(x_3, x_3) \end{matrix}$$

Beispiel

	n7	n32	n37
n7	**0.53**	0.09	0.22
n32	**0.09**	**0.39**	0.12
n37	**0.22**	**0.12**	**0.48**

Schätzung von σ_i und β_i so, dass die **Diskrepanz von Σ und S möglichst gering** wird
➛ Iteratives Vorgehen

Zwischenschritt:

vom Modell implizierte, geschätzte Kovarianzmatrix Σ (oder Korrelationsmatrix *P*)

$$\begin{matrix} cov\,(\sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1, \sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1) & & \\ cov\,(\sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2, \sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1) & cov\,(\sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2, \sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2) & \\ cov\,(\sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3, \sigma_1 + \beta_1 \cdot \theta + \varepsilon_1) & cov\,(\sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3, \sigma_2 + \beta_2 \cdot \theta + \varepsilon_2) & cov\,(\sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3, \sigma_3 + \beta_3 \cdot \theta + \varepsilon_3) \end{matrix}$$

Ergebnis: Empirische Matrix der Steigungsparameter B

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\beta_{11}} & \boldsymbol{\beta_{12}} \\ \boldsymbol{\beta_{21}} & \boldsymbol{\beta_{22}} \\ \boldsymbol{\beta_{31}} & \boldsymbol{\beta_{32}} \end{matrix}$$

Beispiel

	ML1	ML2
n7	0.36	-0.02
n32	0.25	0.25
n37	0.60	-0.12

(Beispiel: 3 Items, zweidimensionales Modell)

Parameterschätzung II

- Im Rahmen der CFA wird häufig die Kovarianzmatrix S als Basis für die Parameterschätzung verwendet
- Im Rahmen der EFA wird häufig die Korrelationsmatrix R als Basis für die Parameterschätzung verwendet
- Die Verwendung der unterschiedlichen Matrizen führt zu unterschiedlichen Lösungen, der Prozess der Schätzung der Parameter ist aber immer gleich
- Weitere Details zur Parameterschätzung werden im Rahmen der Mastervorlesung zu Strukturgleichungsmodellen besprochen

4. Modellevaluation

Schritte einer Faktorenanalyse

Welche Schritte kann eine Faktorenanalyse umfassen?

1. **Bestimmung der Anzahl an latenten Variablen**

➛ In der CFA stets theoriegeleitet, in der EFA theoriegeleitet oder empirisch ermittelt

2. **Spezifikation des Testmodells**

➛ In der CFA beliebig, in der EFA stets ein ein- bzw. mehrdimensionales τ-kongenerisches Modell

3. **Schätzung des Testmodells**

➛ Auswahl an verschiedenen Schätzmethoden für CFA und EFA

➛ EFA erfordert zudem Auswahl einer Rotationstechnik

4. **Evaluation der Modellpassung**

➛ Wesentliches Ziel der CFA, in der EFA aber von nachgestellter Bedeutung (und deshalb hier nur für die CFA betrachtet)

5. **Interpretation der Modellparameter**

➛ Hauptinteresse in der CFA und EFA oft auf den Steigungsparametern

6. **Weiterführende Schritte**

z.B. Prüfung weiterer Gütekriterien (Vorlesung #9 bis #11), Schätzung der Ausprägung einzelner Personen auf der latenten Variable (Vorlesung #12 und #13)

Überblick

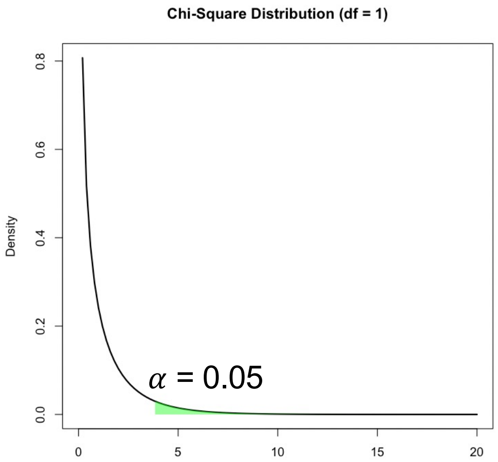
- Es gibt verschiedene Methoden um die Modellpassung (**Modellfit**) in der CFA zu evaluieren
- Sie unterscheiden sich darin, ob sie den Modellfit global oder lokal untersuchen:
  - **Globaler Modellfit** ➛ Wie gut passt das Modell als Ganzes, d.h. mit all seinen Folgerungen, auf die Daten?
    - Modelltest (Omnibushypothesentest aus Vorlesung #06)
    - Fit-Indizes
    - Informationskriterien
  - **Lokaler Modellfit** ➛ Wie gut passen die einzelne Folgerungen des Modells jeweils auf die Daten bzw. wo sind Verletzungen dieser Folgerungen?
    - Inspektion der frei geschätzten Parameter (z.B. Steigungsparameter, Varianz der latenten Variablen) und deren Signifikanz
    - Modifikationsindizes

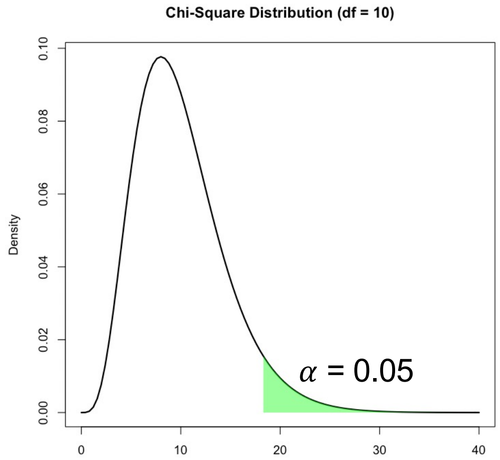
Modelltest I

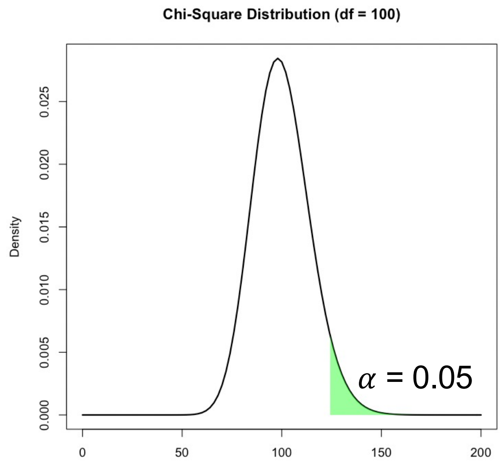
- Lässt sich die Diskrepanz zwischen S und Σ (bzw. P und R) iterativ nicht weiter reduzieren, ergibt sich das Minimum bzw. der **Value of the Fitting-Function** (VFF)
- Multipliziert man den VFF mit $n-1$ erhält man eine Chi-Quadrat verteilte **Teststatistik**: $\chi^2_{emp} = VFF \cdot (n-1)$
- Diese Teststatistik prüft die Nullhypothese:
  - Σ Modell Population = S Population (bzw. P Modell Population = R Population)
  - und bedeutet „übersetzt“: „Modell wird in Population nicht verworfen“
- Die **Freiheitsgrade** für den Modelltest ergeben sich aus der Anzahl der bekannten Größen minus der Anzahl der zu schätzenden Größen
  - Die Anzahl der bekannten Größen sind Einträge der Kovarianzmatrix plus die fixierten/festgelegten Größen
  - Die Anzahl der zu schätzenden Größen sind die unbekannten Größen

Modelltest II

- Die für den Hypothesentest verwendete Teststatistik ist approximativ (bei großen Stichprobengrößen) χ^2- verteilt







- Wir können daher auf Basis der χ^2- Verteilung *p*-Werte angeben und eine Testentscheidung treffen:
  - $p \leq 0.05$: Entscheidung für H_1
  - $p > 0.05$: Entscheidung für H_0

```
Model Test User Model:

  Test statistic                 918.730
  Degrees of freedom                  54
  P-value (Chi-square)             0.000
```

Fit Indizes I

- Zusätzlich zum Signifikanztest geben **Fit-Indizes** an, wie stark das geschätzte Modell von einem perfekten Modell abweicht:
  - $\boldsymbol{SRMR}$ **- Standardized-Squared-Mean-Residual**
  - $\boldsymbol{RMSEA}$ **- Root-Mean-Square-Error-of-Approximation**
- Ideale Werte lieben bei 0, akzeptable Werte sind
  - für den $SRMR \leq 0.11$
  - für den $RMSEA \leq 0.08$ $(\, bei\ n \leq 250)$ bzw. $RMSEA \leq 0.06$ $(bei\ n > 250)$
- Achtung: Diese Angaben (nach Hu & Bentler, 1998) sind nur grobe Richtwerte für die ML-Methode!

Fit Indizes II

- Zusätzlich zum Signifikanztest geben **Fit-Indizes** an, wie stark das geschätzte Modell von einem perfekten Modell abweicht.
- Es gibt auch Möglichkeiten um Cut-Off Werte für ein konkretes aufgestelltes Modell mithilfe von R zu simulieren
  - Dazu wird ein maximal restriktives Nullmodell simuliert vor, in dem alle Items unkorreliert sind und das maximal schlecht auf die Daten passt
  - Die Passung dieses Nullmodels wird dann mit der Passung des getesteten Modell verglichen und die Abweichung in einem Index ausgedrückt
  - Bekanntester Index: **CFI - Comparative Fit Index**
    - Idealer Wert liegt bei 1
    - Akzeptable Werte sind $CFI \geq 0.95$
    - Achtung: Diese Angaben (nach Hu & Bentler, 1998) sind nur grobe Richtwerte für die ML-Methode!

Informationskriterien

- Manchmal liegen keine „akzeptablen“ Modelle vor!

  → Lösung: **Informationskriterien**, z.B. $\boldsymbol{BIC}$ **- Bayes Information Criterion**

- In die Beurteilung der Modellgüte fließt beim $\boldsymbol{BIC}$ ein,
  - wie gut das Modell passt (χ^2_{emp}),
  - wie groß die Stichprobe ist und
  - wie komplex das Modell ist (d.h., die Anzahl zu schätzender Modellparameter)
- Bevorzugt werden Modelle die gleichzeitig gut passen, aber auch sparsam (d.h., wenig komplex) sind
- Die Werte des BIC können in ihrer absoluten Höhe nicht interpretiert werden, sondern nur relativ zueinander verglichen werden. Man vergleicht den BIC also zwischen verschiedenen Modellen und entscheidet sich für das Modell mit dem <u>niedrigsten</u> BIC

Globaler Modellfit im R Output


```
User Model versus Baseline Model:

  Comparative Fit Index (CFI)                    0.783
  Tucker-Lewis Index (TLI)                       0.735

Loglikelihood and Information Criteria:

  Loglikelihood user model (H0)             -17139.704
  Loglikelihood unrestricted model (H1)     -16680.339

  Akaike (AIC)                               34351.408
  Bayesian (BIC)                             34541.438
  Sample-size adjusted Bayesian (SABIC)      34427.078

Root Mean Square Error of Approximation:

  RMSEA                                          0.105
  90 Percent confidence interval - lower         0.099
  90 Percent confidence interval - upper         0.111
  P-value H_0: RMSEA <= 0.050                    0.000
  P-value H_0: RMSEA >= 0.080                    1.000

Standardized Root Mean Square Residual:

  SRMR                                           0.067
```

Lokaler Modellfit

- Die globale Modellpassung gibt keine Auskunft darüber, ob sich tatsächlich jeder geschätzte Parameter in der Population von Null unterscheidet
- Trotz globaler Modellpassung können einzelne Parameter auf Null (oder sehr nahe Null) geschätzt worden sein
  - Zum Beispiel könnte ein Item einen Steigungsparameter von Null aufweisen, was gegen die Zuordnung dieses Items zu der latenten Variable spricht
- **Deshalb sollten die im Modell geschätzten Parameter stets inspiziert werden**
- Zusätzlich kann mithilfe eines **Signifikanztests** für jeden einzelnen Parameter getestet werden, ob dieser sich signifikant von Null unterscheidet
  - H_0: Der Parameter unterscheidet sich nicht von Null
  - H_1: Der Parameter unterscheidet sich von Null

```
Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  EXTRA =~
    n2                0.436    0.020   21.712    0.000    0.436    0.568
    n7                0.390    0.019   20.359    0.000    0.390    0.538
    n47               0.088    0.019    4.588    0.000    0.088    0.131
    …
```

Modifikationsindizes

- Falls sich in der globalen Modellpassung Probleme offenbart haben, lässt sich prüfen, welche (Mis-)Spezifikationen des Modells hierfür verantwortlich sind
- Sogenannte **Modifikationsindizes** (mi) geben an, wie sich der globale Modellfit (d.h., die χ^2- Teststatistik) verbessert, wenn man einen zuvor fixierten Parameter freigibt
- Je höher die Werte der Modifikationsindizes, desto größer die Modellverbesserung. Ab einem Wert von **3.84** kann von einer signifikanten Modellverbesserung ausgegangen werden.
- Basierend auf den Modifikationindizes kann eine entsprechende Re-Spezifikation des Modells vorgenommen werden, wenn die Anpassungen inhaltlich sinnvoll erklärt werden können
  - Zum Beispiel könnte man zulassen, dass die Fehlervariablen zweier Items kovariieren, wenn diese grammatikalisch sehr ähnlich formuliert sind

	lhs	op	rhs	mi	epc
41	n2	~~	n17	120.177	0.118
95	n37	~~	n42	111.704	0.108
43	n2	~~	n27	91.793	0.107
42	n2	~~	n22	79.075	0.106
102	n47	~~	n52	78.861	0.095
64	n12	~~	n37	73.717	0.084

Das war‘s schon fast für heute…

- *Ausblick:* In der nächsten Vorlesung machen wir weiter mit den Grundlagen Faktorenanalyse und schauen uns Anwendungsbeispiele an.

- *Aber zuerst:*
  - **Gibt es offene Fragen zur heutigen Vorlesung?**
  - Zur Vertiefung:
    - Aufgaben 1-2 im Übungsblatt 6 zur Faktorenanalyse auf Moodle
    - Bühner (2021, Kapitel 6 & 7)