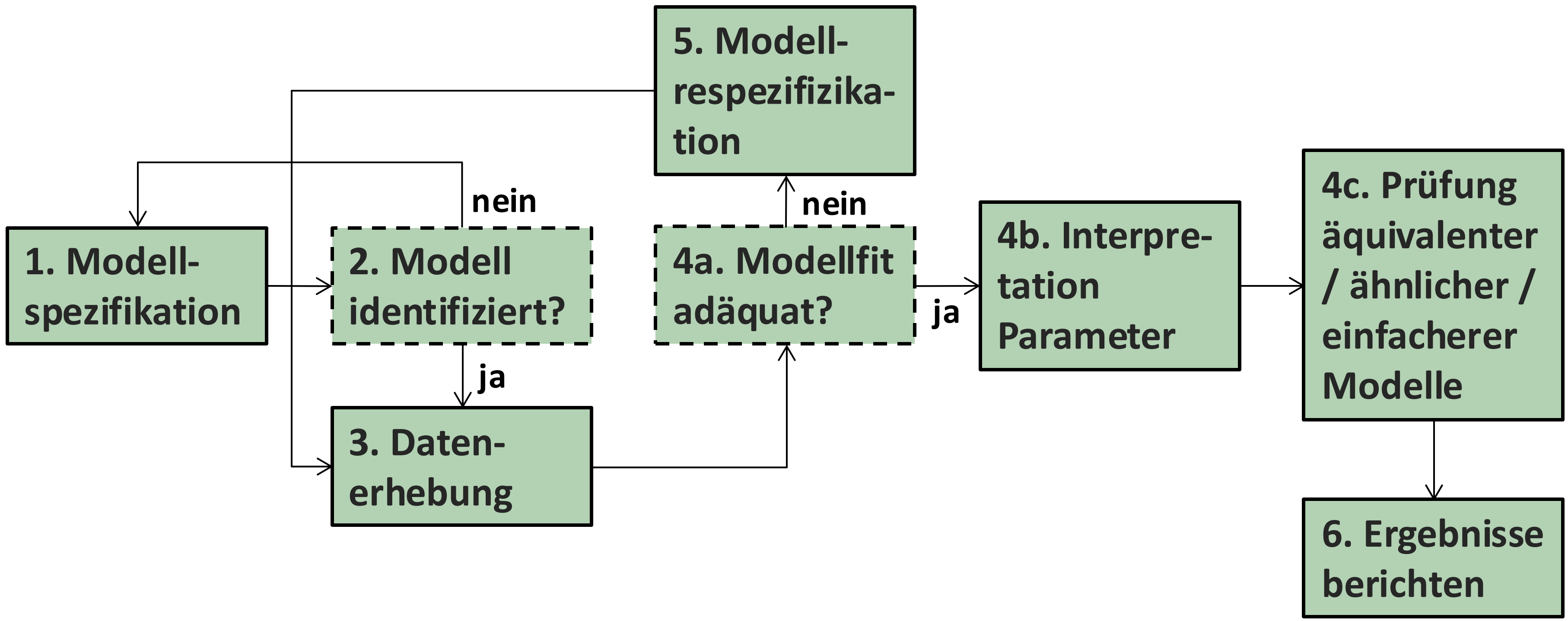
SEM 5: Mediation und Messinvarianz

Flowchart:
Schritte bei der SEM-Modellierung



Fortgeschrittene SEM-Themen

Fortgeschrittene SEM-Themen

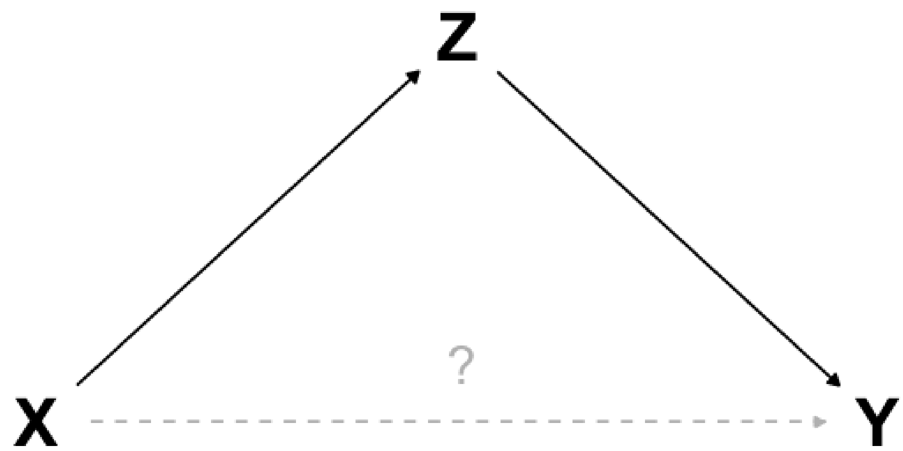
1. (Latente) Mediationsanalyse:
   Betrachtung von direkten und indirekten kausalen Effekten

2. Multigruppen-SEM:
   Testung von Messinvarianz

Mediation

Wiederholung: The Pipe


```
> n <- 1000
> set.seed(1)
> x <- rnorm(n)
> z <- rnorm(n, mean = x)
> y <- rnorm(n, mean = z)
>
> cor(x, y)
[1] 0.5939462
>
> coef(lm(y ~ x))
  (Intercept)             x
-0.0003049726  1.0556230043
> coef(lm(y ~ x + z))
(Intercept)          x          z
 0.01623840  0.02703181  1.02201703
```



- X und Y sind nicht unabhängig
- X und Y sind unabhängig, wenn für Z kontrolliert wird

- Z ist ein „Mediator“ zwischen X und Y
- Einfache Regression schätzt den „totalen“ kausalen Effekt von X auf Y
- Multiple Regression schätzt den „direkten“ kausalen Effekt von X auf Y

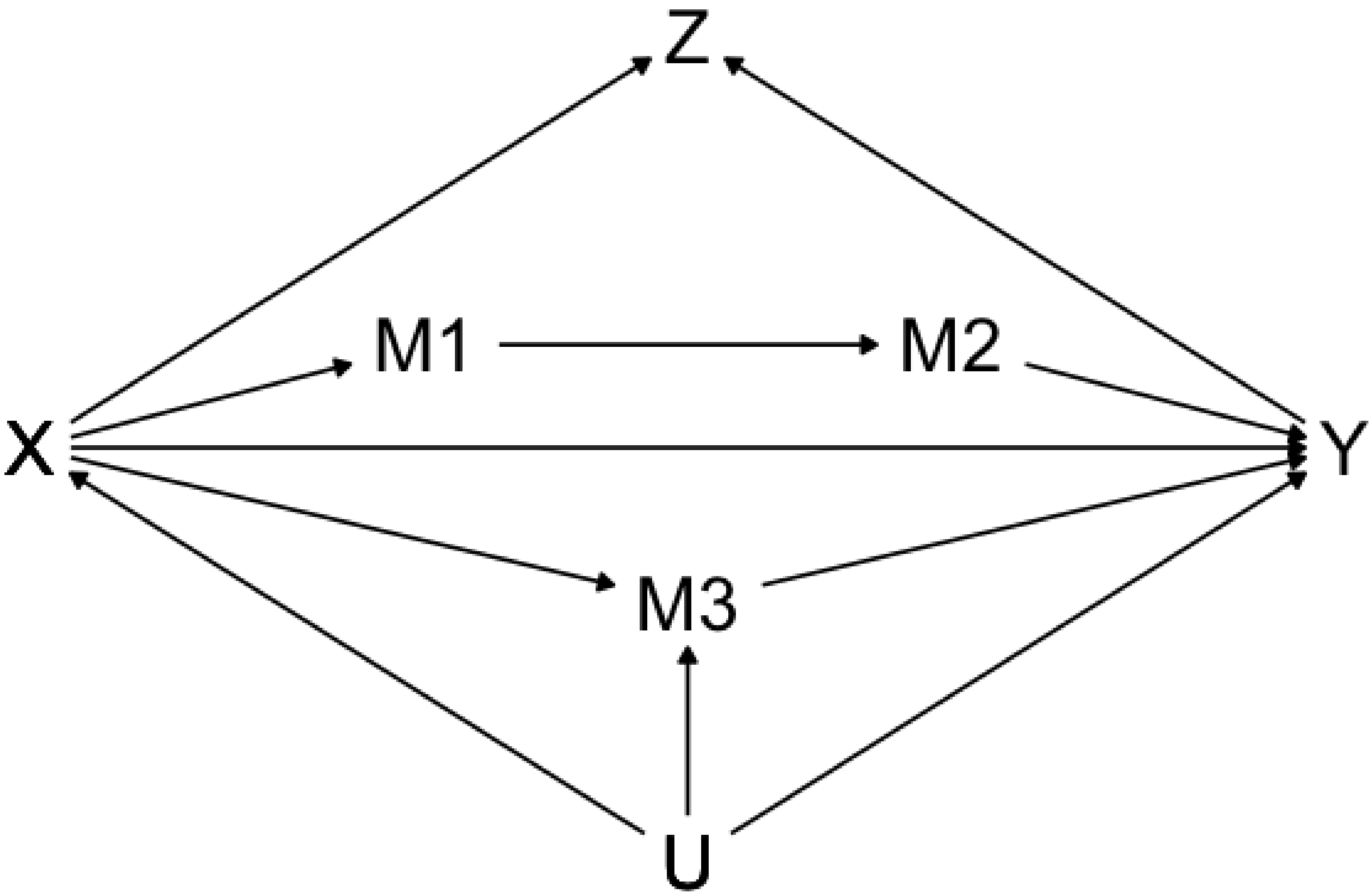
Mediation Einführung

- The Pipe ist die fundamentale Kausalstruktur im Rahmen von Mediationsanalysen.
- In Mediationsanalysen geht es inhaltlich darum, wie sich eine Variable X (Treatment) kausal über eine oder mehrere andere Variablen M (Mediator) auf eine Variable Y (Outcome) auswirkt.
- Im Rahmen der kausalen Inferenz geht es in Mediationsanalysen also im Grunde um die Betrachtung (und den Vergleich) der totalen, direkten und indirekten kausalen Effekten.
- Wir werden zunächst das Phänomen der Mediation allgemein mithilfe von DAGs betrachten.
- Dann werden wir die Schätzung von totalen, direkten und indirekten kausalen Effekten im einfachen Fall von linearen SEMs betrachten.

Wiederholung: Totaler kausaler Effekt

- Totaler kausaler Effekt von X auf Y:
  Erwartete Veränderung in Y bei einer Manipulation von X (z.B. x + 1).
- Der totale Effekt beinhaltet alle Möglichkeiten wie X kausal Y beeinflussen kann. Im DAG sind das alle Möglichkeiten von X nach Y zu gelangen, bei denen nur Pfade in Pfeilrichtung beteiligt sind („kausale Pfade“).
- Um zu bestimmen, für welche Variablen bei der Schätzung des totalen Effekts von X auf Y kontrolliert werden muss, haben wir das **Backdoor Kriterium** besprochen.

Beispiel: DAG Mediation



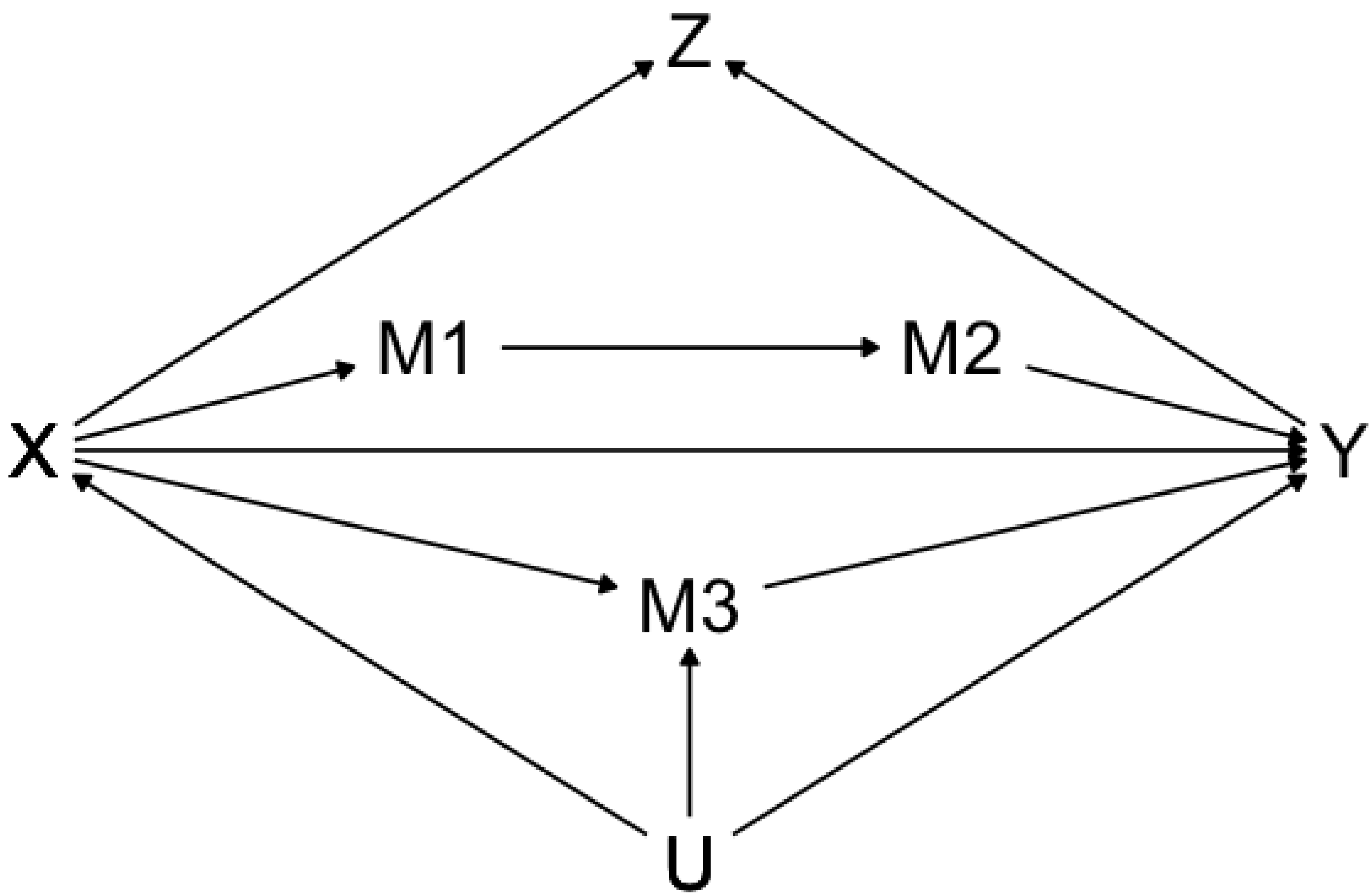
Wiederholung: Begriffe und Prinzipien der kausalen Inferenz mit DAGs

- Ein **Pfad** von X nach Y ist im DAG eine Verbindung, um von X über einen oder mehrere Pfeile nach Y zu kommen, ohne dabei eine Variable mehr als einmal zu besuchen. Die Richtung der Pfeile ist dabei egal.
- Ein Pfad ist **offen**, wenn er keinen Collider enthält. Ein Pfad ist **geschlossen**, wenn er einen Collider enthält.
- Ein **Backdoor Pfad** von X nach Y ist ein Pfad von X nach Y, bei dem ein Pfeil auf X zeigt. Diese Pfade sind potentiell gefährlich, da sie eventuell Confounder des kausalen Effekts von X auf Y enthalten. Backdoor Pfade, die einen Collider enthalten sind geschlossen und damit nicht gefährlich.
- Offene Pfade werden geschlossen, wenn für eine Variable (oder auch mehrere) auf dem Pfad kontrolliert wird, die kein Collider ist.
- Geschlossene Pfade werden geöffnet, wenn für eine Variable auf dem Pfad kontrolliert wird, die ein Collider ist.
  - Wenn auf demselben Pfad für einen Collider *und* für einen nicht-Collider kontrolliert wird, ist der Pfad geschlossen
- Möchte man einen offenen Pfad schließen, wird durch die Kontrolle einer Variable manchmal ein anderer (bisher) geschlossener Pfad geöffnet, der dann wiederum geschlossen werden muss (und so weiter).

Direkter kausaler Effekt

- Direkter kausaler Effekt von X auf Y:
  Erwartete Veränderung in Y bei einer Manipulation von X (z.B. x + 1), die direkt von X nach Y verläuft und bei der keine anderen Variablen Z außer X und Y beteiligt sind (d.h. alle anderen Variablen im DAG haben immer noch den Wert als wäre X gar nicht manipuliert worden). Der direkte Effekt entspricht im DAG dem Pfeil X -> Y.
- Für die Schätzung des direkten kausalen Effekts von X auf Y müssen:
  - Alle offenen Backdoor Pfade geschlossen werden
  - Alle offenen Pfade geschlossen werden, bei denen man von X über andere Variablen M (Mediatoren) nach Y kommt und sich dabei nur in Pfeilrichtung bewegt („kausale Pfade“).
  - Werden beim Schließen der notwendigen offenen Pfade neue Pfade geöffnet, müssen auch diese geschlossen werden (und so weiter).

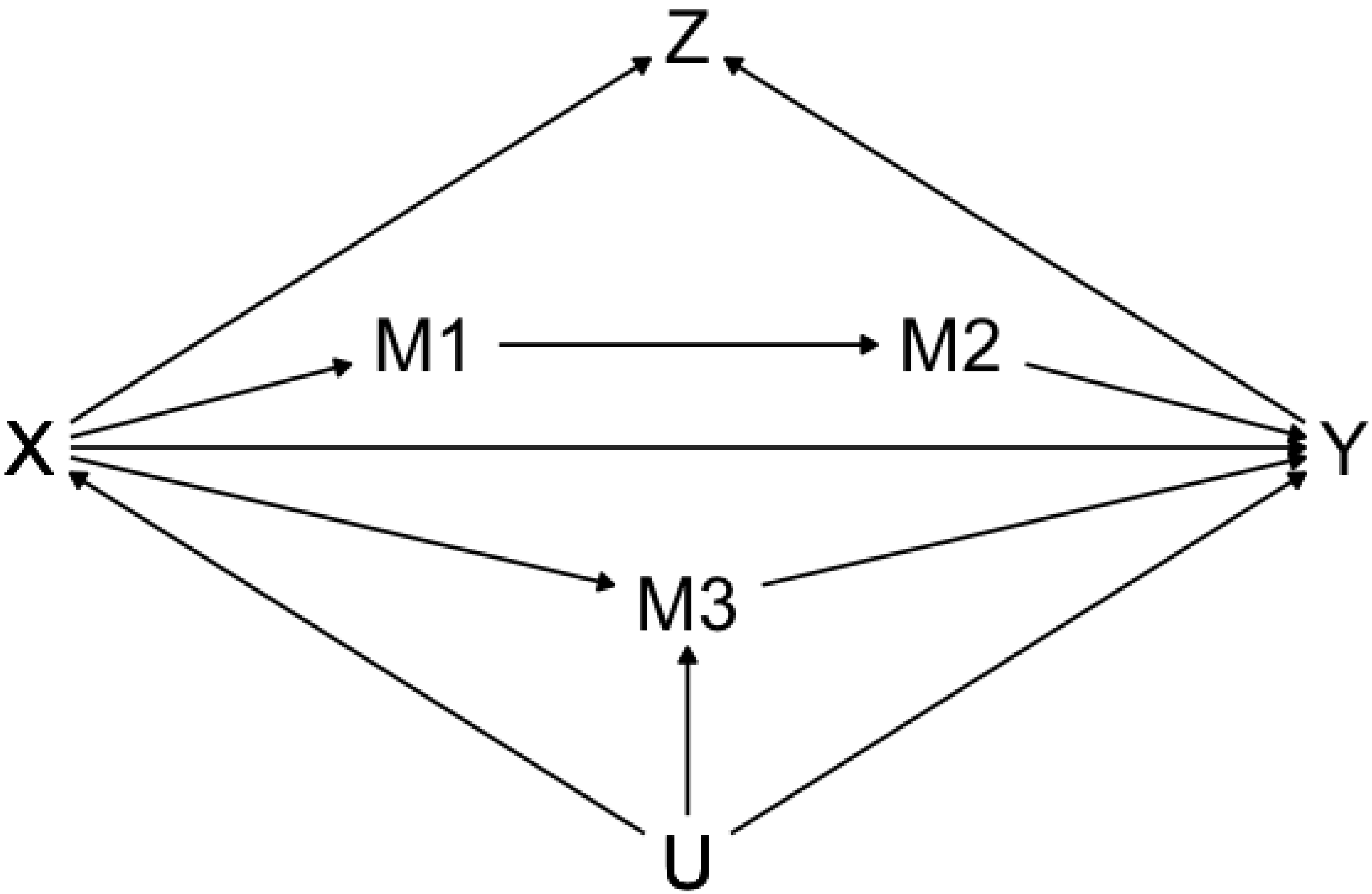
Beispiel: DAG Mediation



Indirekter kausaler Effekt

- Indirekter kausaler Effekt von X auf Y:
  Erwartete Veränderung in Y bei einer Manipulation von X (z.B. x + 1), die *ausschließlich* über *andere* Variablen M (Mediatoren) zwischen X und Y verläuft. Im DAG sind das alle Möglichkeiten von X nach Y zu gelangen, bei denen nur Pfade in Pfeilrichtung beteiligt sind („kausale Pfade"), jedoch ohne den direkten Effekt X -> Y. Gibt es mehrere Mediatoren (bzw. mehrere „causal chains") zwischen X und Y, können die entsprechenden indirekten Effekte auch separat betrachtet werden.
- Die Schätzung von indirekten kausalen Effekten ist im allgemeinen Fall (ohne vereinfachende Annahmen wie Linearität und fehlende Interaktionen) sehr kompliziert und wird in dieser Vorlesung nicht weiter betrachtet.
  - (Auf der folgenden Folie machen wir genau diese vereinfachenden Annahmen)

Beispiel: DAG Mediation



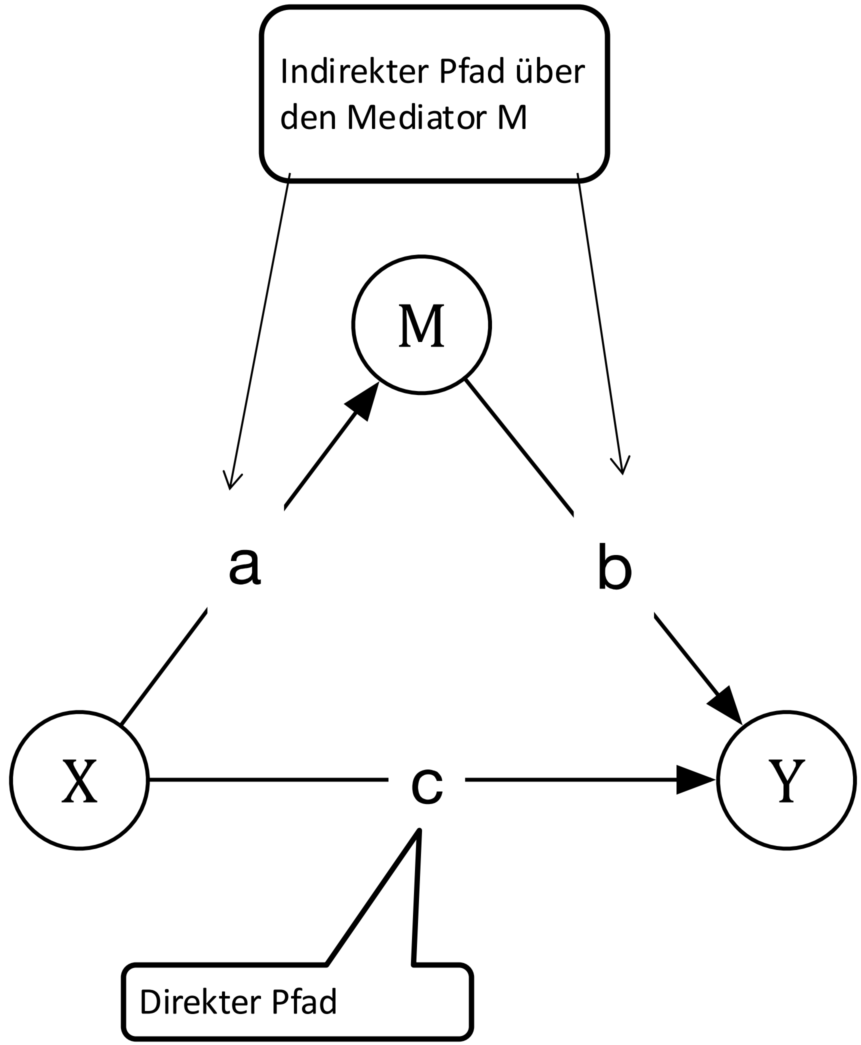
Mediation in linearen SEMs

- In **linearen** Strukturgleichungsmodellen **ohne Interaktionen** gelten die folgenden einfachen Gesetzmäßigkeiten für die direkten, indirekten und totalen Effekte von X auf Y:
  - Der direkte Effekt, d.h. der Pfeil X -> Y, hat einen eindeutigen numerischen Wert. Er entspricht dem Steigungskoeffizient in einer (multiplen) linearen Regression.
  - Ein indirekter Effekt (X -> M -> Y oder X -> M1 -> M2 -> Y) entspricht dem **Produkt** aller Pfadgewichte auf dem entsprechenden kausalen Pfad.
  - Der totale Effekt entspricht der **Summe** aus dem direkten Effekt und allen indirekten Effekten.
- Anstatt die totalen, direkten und indirekten kausalen Effekte mithilfe mehrerer Regressionsmodelle (inklusive der jeweils notwendigen Kontrollvariablen, basierend auf den Regeln der kausalen Inferenz) zu schätzen, ist im SEM Kontext (unter bestimmten Annahmen, siehe später) die gemeinsame Schätzung aller kausalen Effekte innerhalb eines einzigen SEM-Modells möglich.

Latente Mediation

- Das Prinzip der Mediation funktioniert genauso bei SEMs in denen alle (oder nur einige) der an der Mediation beteiligten Variablen latent sind.
- Ein Modell mit einer latenten Mediation enthält also eine Mediation im Strukturmodell, sowie Messmodelle für alle an der Mediation beteiligten latenten Variablen.

Latente Mediation: Durchführung im SEM Framework


Indirekter Pfad über den Mediator M
M
a
b
X
c
Y
Direkter Pfad

Indirekter Effekt

- Direkte kausale Effekte):
  - a ist der direkte kausale Effekt von X auf M
  - b ist der direkte kausale Effekt von M auf Y
  - c ist der direkte kausale Effekt von X auf Y
- Indirekter kausaler Effekt von X auf Y entspricht $a \cdot b$

Hinweis zur Schätzung indirekter Effekte in der Praxis:

- Die multiplikative Verknüpfung $(a \cdot b)$ führt zwingend zu einer Verletzung der Annahme der multivariaten Normalverteilung.
- Folge: Standardfehler von indirekten Effekten werden mit der herkömmlichen Methode nicht zuverlässig geschätzt und sollten stattdessen besser mithilfe einer speziellen **Bootstrap Methode** geschätzt werden (z.B. `se = "bootstrap"` in der *cfa()* Funktion im *lavaan* Paket).

Mediation in R (I)

```
> library(lavaan)
>
> model <- '
+ # measurement models
+ X =~ x1 + x2 + x3
+ M =~ x4 + x5 + x6
+ Y =~ x7 + x8 + x9
+ # direct effect(s)
+ Y ~ c*X
+ M ~ a*X
+ Y ~ b*M
+ # indirect effect (a*b)
+ ab := a*b
+ # total effect
+ total := c + (a*b)
+ '
>
> set.seed(1)
> fit <- cfa(model, data = HolzingerSwineford1939, se = "bootstrap")
```

Mediation in R (II)


```
> summary(fit, standardized = TRUE, fit.measures = TRUE)
lavaan 0.6.15 ended normally after 32 iterations

  Estimator                                         ML
  Optimization method                           NLMINB
  Number of model parameters                        21

  Number of observations                           301

Model Test User Model:

  Test statistic                                85.306
  Degrees of freedom                                24
  P-value (Chi-square)                           0.000

Model Test Baseline Model:

  Test statistic                               918.852
  Degrees of freedom                                36
  P-value                                        0.000

User Model versus Baseline Model:

  Comparative Fit Index (CFI)                    0.931
  Tucker-Lewis Index (TLI)                       0.896
```

Mediation in R (III)


```
Loglikelihood and Information Criteria:

  Loglikelihood user model (H0)              -3737.745
  Loglikelihood unrestricted model (H1)      -3695.092

  Akaike (AIC)                                7517.490
  Bayesian (BIC)                              7595.339
  Sample-size adjusted Bayesian (SABIC)       7528.739

Root Mean Square Error of Approximation:

  RMSEA                                          0.092
  90 Percent confidence interval - lower         0.071
  90 Percent confidence interval - upper         0.114
  P-value H_0: RMSEA <= 0.050                    0.001
  P-value H_0: RMSEA >= 0.080                    0.840

Standardized Root Mean Square Residual:

  SRMR                                           0.065
```

Mediation in R (IV)


```
Parameter Estimates:

  Standard errors                                Bootstrap
  Number of requested bootstrap draws                 1000
  Number of successful bootstrap draws                1000

Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  X =~
    x1                1.000                               0.900    0.772
    x2                0.554    0.139    3.986    0.000    0.498    0.424
    x3                0.729    0.156    4.674    0.000    0.656    0.581
  M =~
    x4                1.000                               0.990    0.852
    x5                1.113    0.066   16.836    0.000    1.102    0.855
    x6                0.926    0.061   15.270    0.000    0.917    0.838
  Y =~
    x7                1.000                               0.619    0.570
    x8                1.180    0.148    7.978    0.000    0.731    0.723
    x9                1.082    0.380    2.850    0.004    0.670    0.665
```

Mediation in R (V)

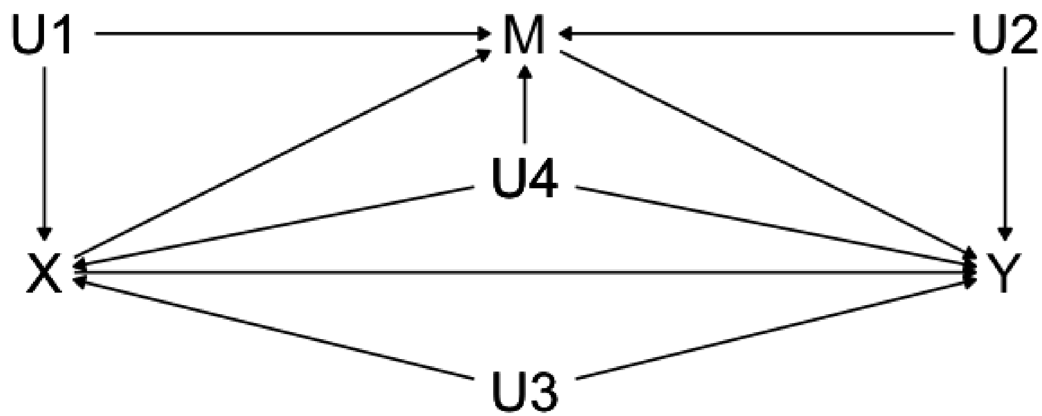

```
Regressions:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  Y ~
    X          (c)    0.297    0.080    3.699    0.000    0.431    0.431
  M ~
    X          (a)    0.504    0.097    5.179    0.000    0.459    0.459
  Y ~
    M          (b)    0.053    0.055    0.970    0.332    0.085    0.085

Variances:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
   .x1                0.549    0.161    3.402    0.001    0.549    0.404
   .x2                1.134    0.112   10.126    0.000    1.134    0.821
   .x3                0.844    0.103    8.223    0.000    0.844    0.662
   .x4                0.371    0.051    7.235    0.000    0.371    0.275
   .x5                0.446    0.056    7.973    0.000    0.446    0.269
   .x6                0.356    0.047    7.582    0.000    0.356    0.298
   .x7                0.799    0.101    7.891    0.000    0.799    0.676
   .x8                0.488    0.123    3.971    0.000    0.488    0.477
   .x9                0.566    0.131    4.309    0.000    0.566    0.558
    X                 0.809    0.185    4.373    0.000    1.000    1.000
   .M                 0.774    0.105    7.367    0.000    0.790    0.790
   .Y                 0.297    0.107    2.778    0.005    0.773    0.773

Defined Parameters:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
    ab                0.027    0.028    0.949    0.343    0.039    0.039
    total             0.324    0.076    4.290    0.000    0.471    0.471
```

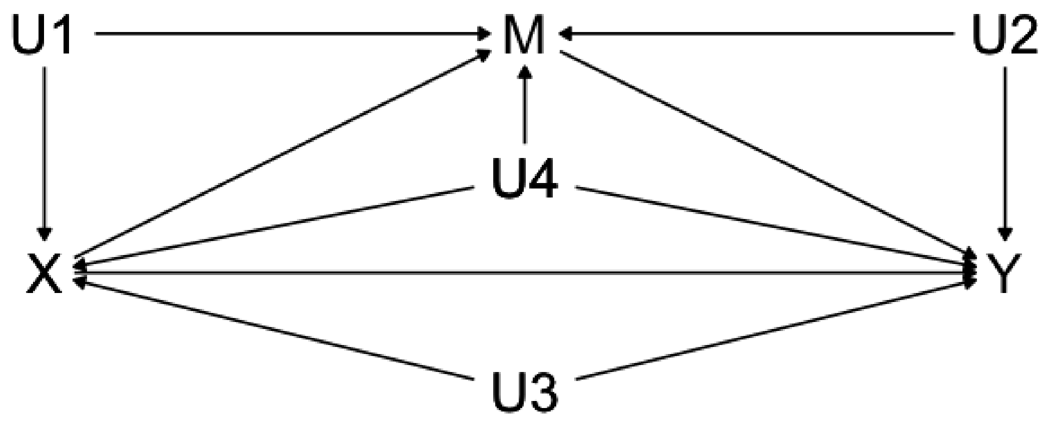
Wichtige Annahmen von Mediationsmodellen

Keine nicht berücksichtigten Confounder (I)



- Liegen Confounder (z.B. hier die Variablen U1, U2, U3, U4) zwischen den Variablen X, M und Y vor, muss bei der Schätzung von kausalen Effekten für diese Confounder kontrolliert werden, entweder durch…
  - Aufnahme in das statistische Modell, oder
  - Randomisierung von X und / oder M.

Keine nicht berücksichtigten Confounder (II)



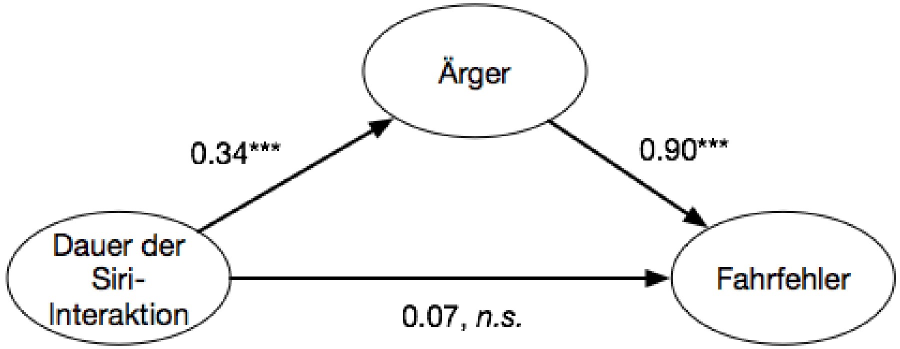
- Für die Schätzung des **totalen** kausalen Effekts von X auf Y ist eine Kontrolle von Confoundern U1, U3 und U4 (zum Beispiel durch Randomisierung von X) ausreichend.
- Für die Schätzung der **direkten** und **indirekten** kausalen Effekte ist zur experimentellen Kontrolle aller Confounder U1, U2, U3, U4 auch eine Randomisierung von M notwendig (X nicht ausreichend).
- <u>*Problem:*</u> In psychologischen Fragestellungen ist M häufig eine Variable, für die eine Randomisierung nicht so leicht möglich ist (z.B. Persönlichkeitseigenschaften). Gleichzeitig liegen häufig Confounder vor, die nur sehr schwer erhoben werden können (z.B. genetische Einflüsse).

Keine umgedrehte Kausalität (I)

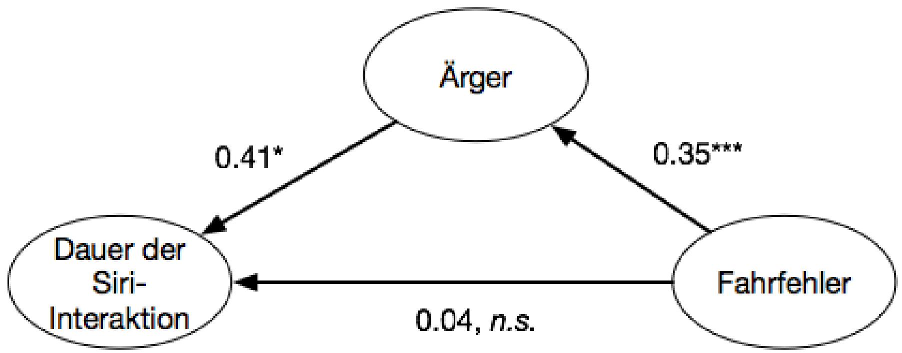
- Die Richtung der kausalen Effekte zwischen den Variablen X, M und Y müssen theoretisch begründet werden.
- Die Kausalrichtung ist (in den meisten Fällen) nicht mithilfe der Modelltests und den Fit Indizes testbar, da im (einfachen) Mediationsmodell alle Modelle mit unterschiedlichen Kausalrichtungen äquivalent sind (s. VL1 zu DAGs).
- Alle äquivalenten Modelle passen auf die Daten immer gleich gut. Sie sind nicht mithilfe der Modelltests und Fit Indizes unterscheidbar, da alle äquivalenten Modelle immer den gleichen Modellfit aufweisen.

Keine umgedrehte Kausalität (II)
Wiederholung: Äquivalente Modelle

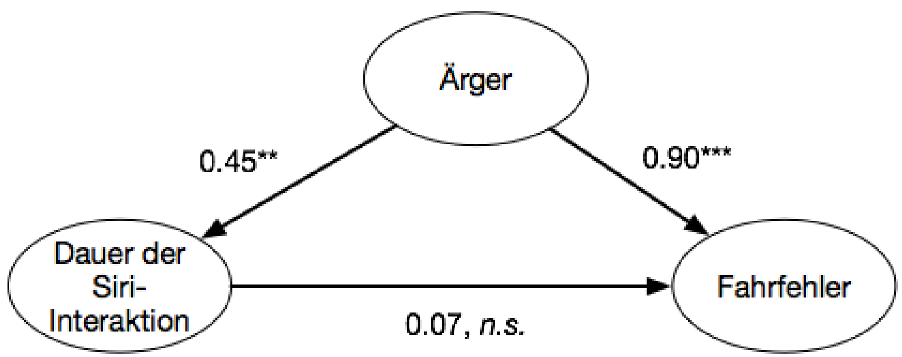
+ 3 weitere äquivalente Modelle!



$\chi^2(4) = 4.338$, $p = .362$
CFI = 0.996
SRMR = 0.032
RMSEA = 0.024



$\chi^2(4) = 4.338$, $p = .362$
CFI = 0.996
SRMR = 0.032
RMSEA = 0.024



$\chi^2(4) = 4.338$, $p = .362$
CFI = 0.996
SRMR = 0.032
RMSEA = 0.024

Thoemmes, F. (2015) Reversing Arrows in Mediation Models Does Not Distinguish Plausible Models, Basic and Applied Social Psychology, 37, 226-234.

Exkurs: Keine nichtlinearen Effekte oder Interaktionen

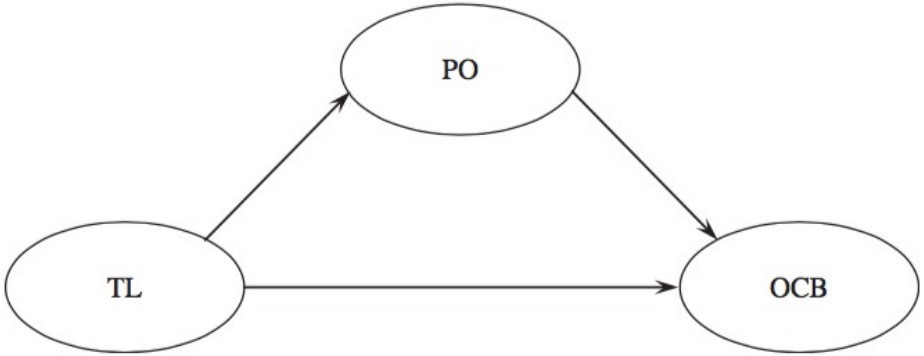
- Das in dieser Vorlesung betrachtete Vorgehen zur einfachen Schätzung der totalen, direkten und indirekten Effekte in SEMs gilt so nur unter der Annahme, dass…
  - die Zusammenhänge zwischen X, M, und Y jeweils linear sind und
  - keine Interaktionen zwischen den Variablen vorliegen.
- Bei Vorliegen von linearen Interaktionen ist die Schätzung weiterhin relativ einfach möglich, es gibt aber einige Dinge zu beachten (z.B. verändert sich die Definition des direkten und indirekten Effekts), die wir hier nicht besprechen.
- Bei Vorliegen von nichtlinearen Zusammenhängen, ist eine Schätzung außerhalb des SEM Kontexts (zumindest prinzipiell) möglich, sofern eine belastbare Theorie über die Art der Zusammenhänge vorliegt und diese damit zufriedenstellend modelliert werden können (siehe dazu z.B. das *mediation* Paket in R).

Keine korrelierten Messfehler

- Bei latenten Mediationsmodellen wird implizit angenommen, dass die Messmodelle für die latenten Variablen korrekt spezifiziert sind. In der Regel geht man hier von einer Einfachstruktur aus (X, M, Y haben jeweils eigene Indikatoren, d.h. jeder Indikator lädt nur auf eine der Variablen).
- Das Vorliegen von korrelierten Messfehlern (mögliche Gründe: nicht berücksichtigte Nebenladungen, nicht berücksichtigte externe kausale Einflüsse auf alle Itemantworten wie z.B. Antwortstile) führt in der Regel zu Bias in der Schätzung der totalen, direkten und indirekten Effekte.

Mediation: Ein typisches Beispiel

A missing link: psychological ownership as a mediator between transformational leadership and organizational citizenship behaviour



Hypothesis 1: TL positively influences employees' OCB.
Hypothesis 2: TL positively influences the level of employees' PO of their organization.
Hypothesis 3: PO positively influences employees' OCB.
Hypothesis 4: PO plays the role of mediator in explaining the relationship between TL and OCB.

- TL = transformational leadership; PO = psychological ownership; OCB = organizational citizenship behaviours.

Park, C. H., Song, J. H., Yoon, S. W., & Kim, J. (2013). A missing link: psychological ownership as a mediator between transformational leadership and organizational citizenship behaviour. Human Resource Development International, 16(5), 558–574.

A missing link: psychological ownership as a mediator between transformational leadership and organizational citizenship behaviour

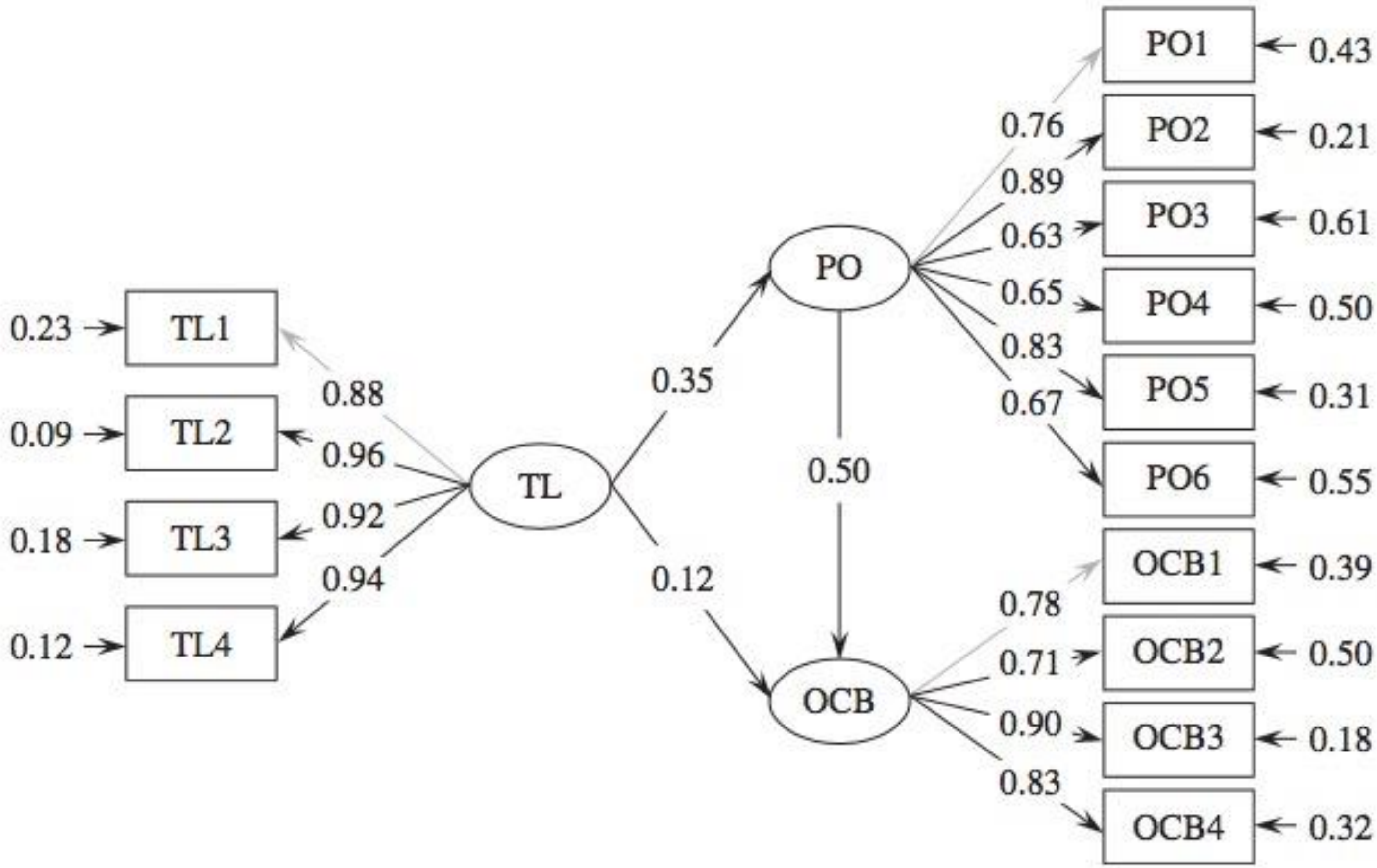


Figure 2. Full model SEM results with SPC estimates.
Note: TL = transformational leadership; PO = psychological ownership; OCB = organizational citizenship behaviours.

A missing link: psychological ownership as a mediator between transformational leadership and organizational citizenship behaviour

Table 2. Results of CFA.

Model fit indices	*df*	χ^2	χ^2/df	RMSEA	RMR	GFI	CFI	NNFI
Measurement model	74	206.74	2.79	.09	.06	.88	.96	.95

χ2-Test nicht berichtet:
pchisq(206.74, df=74, lower.tail=FALSE) < .0000000001

Table 5. Decomposition of effects.

Paths		Standardized path coefficient (SPC) Direct effect	Indirect effect	Total effect
TL	→ PO	.35* „a“ Pfad	–	.35*
	→ OCB	.12 Direkter „c“ Pfad		.30*
	→ (Through PO)		.18*	
PO	→ OCB	.50* „b“ Pfad	–	.50*

Note: *Path is significant at *t*-value > |1.96|.

0.35*0.50 = 0.175

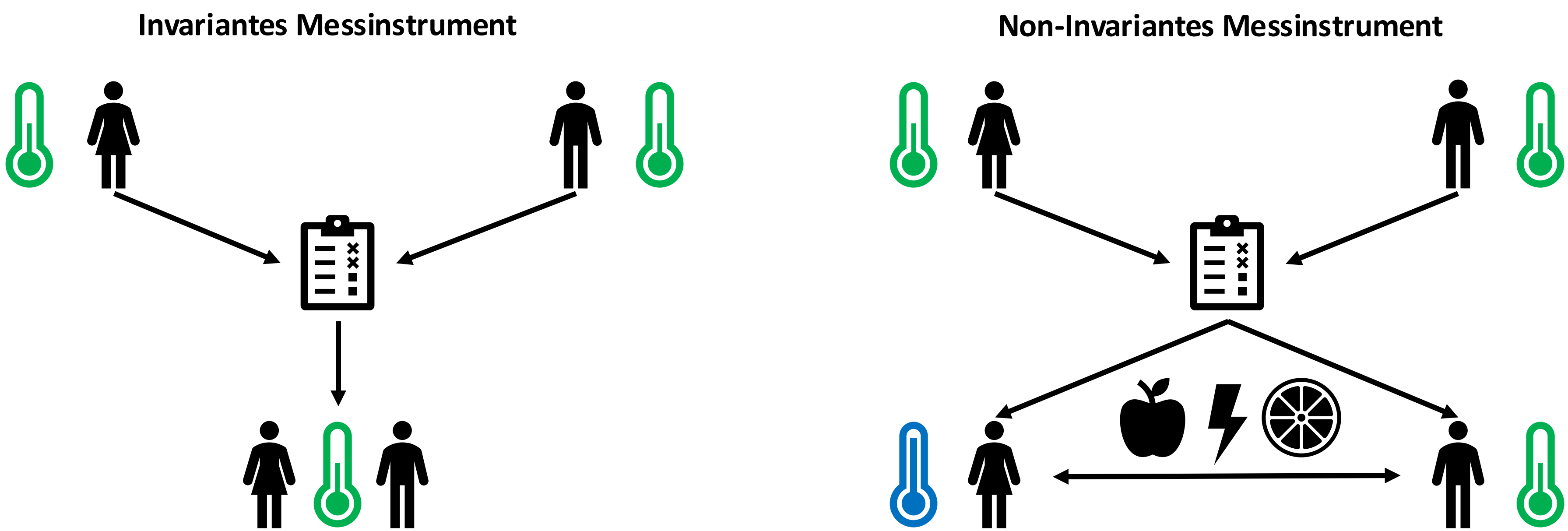
.12 + .18 = .30

Multigruppen-SEM und Messinvarianz

Multigruppen-SEM und Messinvarianz

- In einem Multigruppen-SEM wird ein bestimmtes Modell gleichzeitig für verschiedene Gruppen von Personen (z.B. Daten aus zwei Ländern) betrachtet.
- Ein Ziel von Multigruppen-SEMs ist herauszufinden, ob **Messinvarianz** zwischen den Gruppen vorliegt.
- Zentrale Frage bei der Prüfung von Messinvarianz:
  Sind der Grund für beobachtete Gruppenunterschiede die wahren Unterschiede zwischen den Gruppen oder werden die Konstrukte in den Gruppen nur unterschiedlich gemessen?
- Von dem Vorliegen verschiedener Stufen von Messinvarianz hängt ab, wie aussagekräftig und zulässig Vergleiche der Gruppen hinsichtlich ihrer durchschnittlichen Ausprägung auf den latenten Variablen sind.

Multigruppen-SEM und Messinvarianz



- Wenn Messinvarianz nicht vorliegt, wird abhängig von Gruppenzugehörigkeiten ein anderes Testergebnis erwartet, obwohl die tatsächliche, „wahre“ Ausprägung auf dem Konstrukt gleich ist (wir vergleichen dann “apples and oranges“)
- Häufig liest man, dass Messinvarianz bedeutet, dass dasselbe Konstrukt in den Gruppen gemessen wird. Das ist nicht ohne weiteres richtig. Was in den jeweiligen Gruppen gemessen wird, ist eine Frage der Validität.
- Messinvarianz bedeutet in erster Linie, dass in beiden Gruppen auf dieselbe Art und Weise gemessen wird (d.h., dass die Parameter der Messmodelle in beiden Gruppen gleich/invariant sind).
- S. hierzu auch Protzko (2024)

Mögliche Ursachen für Non-Invarianz

- Messinvarianz kann durch viele Faktoren verletzt sein, z. B.
  - Alterseffekte: „Ich gehe gerne auf Partys“ ist vielleicht ein gutes Extraversionsitem für Personen im Alter von 20-40 Jahren. Bei 70-Jährigen ist die „Verbindung“ zum Konstrukt Extraversion wahrscheinlich weniger stark (s. Seifert, Rohrer, & Schmuckle, 2024)
  - Geschlechtereffekte: Depressionen manifestieren sich unterschiedlich zwischen Männern und Frauen (z. B. externalisierende vs. internalisierende Symptome). „Ich weine viel“ könnte abhängig vom Geschlecht ein unterschiedlich starker „Marker“ für Depression sein.
  - Kulturelle Effekte: Antwortskalen (z. B. Likert-Skalen, „stimme nicht zu“ bis „stimme zu“) werden häufig unterschiedlich zwischen Gruppen verwendet, z. B. kulturelle Unterschiede in Zustimmungstendenzen (s. Lechner, Partsch, Dammer, & Rammstedt, 2019)

Multigruppen-SEM: Ablauf

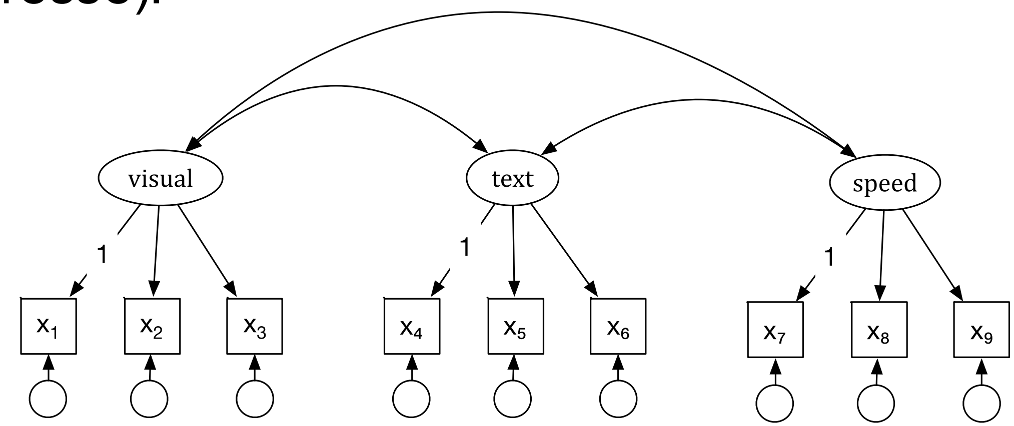
- Multigruppen-SEM:
  - Stichprobe wird in (z.B., 2) Gruppen eingeteilt (z.B. Daten aus zwei Ländern)
  - In jeder Gruppe wird das SEM zunächst *separat* geschätzt – aber es gibt über alle Gruppen hinweg (jeweils) eine gemeinsame Fit-Statistik
  - „Group equality constraints“: es wird nochmal ein solches Modell geschätzt, aber diesmal mit der Anforderung, dass bestimmte Parameter zwischen den Gruppen gleich sein müssen (s. nächste Slide)
- Modellvergleich mit χ^2-Differenzentest: Wird der Modellfit (über alle Gruppen hinweg) signifikant schlechter, wenn constraints zwischen den Gruppen eingeführt werden?
- Da der χ^2-Differenzentest die Stärke der Invarianz nicht berücksichtigt und gleichzeitig bei großen Stichproben eine hohe Power aufweist, wird empfohlen, bei der Testung von Messinvarianz auch Unterschiede in den Fit Indices (vor allem RMSEA und CFI) zu betrachten.

Verschiedene Arten von Messinvarianz

- **„Configural invariance“**
  - Zwei Gruppen (z.B. Daten aus zwei verschiedenen Ländern), beide bekommen das strukturell gleiche Modell, werden aber separat gefittet
- **„Weak/metric invariance“**
  - Faktorladungen (latente Faktoren → Indikatoren) werden zwischen den Gruppen gleichgesetzt
- **„strong/scalar invariance“**
  - (zusätzlich zu den Faktorladungen:) Intercepts der Items gleichsetzen
- *Wichtig:* Will man Gruppen in ihrer durchschnittlichen Ausprägung auf den latenten Konstrukten vergleichen, muss **strong/scalar invariance** gegeben sein!
  [Hinweis: Es gibt noch weitere Typen von Invarianzen]

Invarianz am Beispieldatensatz von Holzinger/Swineford (1939)

- Gilt das Messmodell (drei Faktoren) für Probanden (Schüler*innen) verschiedener Schulen gleichermaßen (wichtig wenn Gruppenunterschiede von Interesse):




```
HS.model <- '
        visual  =~ x1 + x2 + x3
        textual =~ x4 + x5 + x6
        speed   =~ x7 + x8 + x9
'

fit <- cfa(model = HS.model,
        data = HolzingerSwineford1939, group = "school")

summary(fit, standardized = TRUE, fit.measures = TRUE)
```

Invarianz am Beispieldatensatz von Holzinger/Swineford (1939)


```
Group 1 [Pasteur]:

Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  visual =~
    x1                1.000                               1.047    0.887
    x2                0.394    0.122    3.220    0.001    0.412    0.336
    x3                0.570    0.140    4.076    0.000    0.597    0.515
  textual =~
    x4                1.000                               0.946    0.823
    x5                1.183    0.102   11.613    0.000    1.119    0.856
    x6                0.875    0.077   11.421    0.000    0.827    0.838

Group 2 [Grant-White]:

Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  visual =~
    x1                1.000                               0.777    0.677
    x2                0.736    0.155    4.760    0.000    0.572    0.517
    x3                0.925    0.166    5.583    0.000    0.719    0.694
  textual =~
    x4                1.000                               0.971    0.866
    x5                0.990    0.087   11.418    0.000    0.961    0.829
    x6                0.963    0.085   11.377    0.000    0.935    0.826
```

Invarianz am Beispieldatensatz von Holzinger/Swineford (1939)


```
fit2 <- cfa(HS.model, data = HolzingerSwineford1939,
          group = "school", group.equal = c("loadings"))

Group 1 [Pasteur]:

Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  visual =~
    x1                1.000                               0.897    0.771
    x2        (.p2.)  0.599    0.100    5.979    0.000    0.537    0.432
    x3        (.p3.)  0.784    0.108    7.267    0.000    0.704    0.600
  textual =~
    x4                1.000                               0.956    0.823
    x5        (.p5.)  1.083    0.067   16.049    0.000    1.035    0.824
    x6        (.p6.)  0.912    0.058   15.785    0.000    0.871    0.860

Group 2 [Grant-White]:

Latent Variables:
                   Estimate  Std.Err  z-value  P(>|z|)   Std.lv  Std.all
  visual =~
    x1                1.000                               0.850    0.727
    x2        (.p2.)  0.599    0.100    5.979    0.000    0.509    0.466
    x3        (.p3.)  0.784    0.108    7.267    0.000    0.667    0.651
…
```

Invarianz am Beispieldatensatz von Holzinger/Swineford (1939)


```
# Modellvergleich mit anova() Funktion:

anova(fit,fit2)
Chi-Squared Difference Test

     Df    AIC    BIC  Chisq Chisq diff Df diff Pr(>Chisq)
fit  48 7484.4 7706.8 115.85
fit2 54 7480.6 7680.8 124.04     8.1922       6     0.2244
```

- Nützlich für eine ausführliche Testung von Messinvarianz sind außerdem die Funktionen *compareFit()* und *measEq.syntax()* aus dem *semTools* Paket

Interpretation des Beispiels: Modell mit gleichen Ladungsparametern (loading constraint) für die verschiedenen Gruppen nicht schlechter als Modell mit freier Parameterschätzung: „metric invariance“ wurde festgestellt

- Im nächsten Schritt würden wir noch die Invarianz der Intercepts testen und mit dem metric model (fit2) vergleichen:

```
fit3 <- cfa(HS.model, data = HolzingerSwineford1939,
group = "school", group.equal = c("loadings, intercepts"))
```

Exkurs: Weitere Methoden

- Die eben vorgestellte Methode zur Untersuchung von Messinvarianz heißt Multigruppen-CFA
- Es gibt noch viele weitere Methoden und Modelle, für Übersichten s. Kim, Cao, Wang, und Nguyen (2017) und Sterner, De Roover, und Goretzko (2024)
- Außerdem ist in den letzten Jahren eine Diskussion darüber entstanden, wie realistisch, brauchbar und aussagekräftig (das Vorliegen von) Messinvarianz ist.
  - Das Lager der „Kritiker*innen“: Funder und Gardiner (2024); Robitzsch & Lüdtke (2023); Welzel, Brunkert, Kruse, und Inglehart (2021)
  - Das Lager der „Befürworter*innen“: Meulemann et al. (2022); Sterner, Deffner, Pargent, und Goretzko (2024); Fischer und Rudnev (2024)

Gesamtfazit SEM

Gesamtfazit SEM

- Lineare Strukturgleichungsmodelle (SEMs) sind in ihrer Anwendung extrem flexibel. Modelliert und getestet werden können u.a.
  - ✓ Faktorstrukturen
  - ✓ Messmodelle
  - ✓ Mediationen, Moderationen (← Interaktionen haben wir uns in dieser VL nicht angeschaut)
  - ✓ Gruppenunterschiede
  - ✓ Wachstumskurvenmodelle (← haben wir nur im WiSe im LMM Kontext betrachtet, geht aber im SEM Kontext genauso)
  - ✓ ...
- Es gibt jedoch wie immer wichtige Einschränkungen. Als Beispiele:
  - Kausalität kann nicht aus einem passenden Modell abgeleitet werden (Es gilt immer nur: „Falls das kausale Modell gilt, dann folgt…“). Oft gibt es äquivalente Modelle mit völlig unterschiedlicher Kausalstruktur. Dies gilt allerdings für alle statistischen Modelle
    (z. B. die Regression aus Statistik 2)
  - Zwar entdeckt der χ^2-Modelltest am zuverlässigsten missspezifizierte Modelle, er berücksichtigt jedoch nicht die Stärke der Modellverletzung.